受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔物質科学科，地球資源環境学科
電子制御システム工学科
材料プロセス工学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

1

(1) △ABCの面積 $= \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CA \sin 60°$

$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{10\sqrt{3}}} \cdots$ (答)

(2) △ABCで余弦定理より

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\cdot BC\cdot CA\cos 60°$

$= 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \frac{1}{2}$

$= 49$

$AB > 0$ より $AB = 7$

外接円の半径をRとすると、正弦定理より

$\frac{AB}{\sin 60°} = 2R \quad \therefore R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

よって 円Oの半径 $= \underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}}} \cdots$ (答)

(3) △ABCと△DEFの相似比を $1:k$

(kは正の実数) とおくと、

面積比は $1:k^2$ なので△DEFの面積は $10\sqrt{3}k^2$

また △DEFの3辺は、それぞれ $5k, 8k, 7k$

とおけるので、

$\frac{1}{2}(DE+EF+FD)\times R = 10\sqrt{3}k^2$

$\therefore \frac{1}{2}(5k+8k+7k)\times\frac{7\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}k^2$

$k \neq 0$ なので $k = \frac{7}{3}$ ($k>0$をみたす)

△ABCと△DEFの相似比は $1:\frac{7}{3}$

つまり $\underline{\underline{3:7}} \cdots$ (答)

数学　解答用紙

2

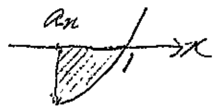
(1) $f_n'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\log x+x^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}(\log x+n)$

$f_n'(x)=0$ より $\log x=-n$ $\therefore x=e^{-n}$

x	(0)	$\cdots$	e^{-n}	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_n(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$

左表から 極小値 $f_n(e^{-n})=-\frac{n}{e}$
極大値なし …(答)

(2) (1)の表から、$a_n\leqq x\leqq 1$ で $f_n(x)\leqq 0$ であるから



$S_n=-\int_{a_n}^{1}f_n(x)dx=-\int_{e^{-n}}^{1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}x^{1+\frac{1}{n}}\right)'\log x\,dx$

$=-\left[\frac{n}{n+1}x^{1+\frac{1}{n}}\log x\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{n}{n+1}\int_{e^{-n}}^{1}x^{\frac{1}{n}}dx$

$=\frac{n}{n+1}\cdot e^{-n-1}\cdot(-n)+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left[x^{1+\frac{1}{n}}\right]_{e^{-n}}^{1}=-\frac{n^2}{n+1}e^{-n-1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(1-e^{-n-1})$

$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2-\frac{n^2}{n+1}e^{-n-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\{1-(n+2)e^{-n-1}\}$ …(答)

(3) $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$。また、$(n+2)\cdot e^{-(n+2)}\cdot e\to 0\cdot e=0\ (n\to\infty)$

であるから、$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ …(答)

受 験 番 号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

3

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

よって $P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ …(答)

(2) $A\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ より $A = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ …(答)

(3) $B\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ より $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ …(答)

(4) (2)(3)より $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$BABA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

すると、$AB + BABA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ となり、これを X とすれば

$X^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = 2X$ となる.

よって $(AB+BABA)^n = X^n = 2^{n-1}X = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ …(答)