医学科 [I]

(1) 取り出し方は全部で ${}_nC_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ 通り

和が 8 となる組合せは

$(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$ の 2 通り

よって. 求める確率を p_n とすると

$$p_3 = 0,\ p_4 = \frac{1}{4},\ p_n = \frac{12}{n(n-1)(n-2)}\ (n \geqq 5)$$ …(答)

(2) 1回の試行でそれぞれの数字を取り出す確率は $\dfrac{1}{n}$

3回のうち, ちょうど2回同じ数になるのは

$${}_nP_2 \times \frac{3!}{2!} = 3n(n-1) \text{ 通り}$$

求める確率を q_n とすると

$$q_n = 3n(n-1) \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{3(n-1)}{n^2}$$ …(答)

(3) $q_n \geqq \dfrac{1}{2}$ となるのは (2) より

$\dfrac{3(n-1)}{n^2} \geqq \dfrac{1}{2}$ より $n(6-n) \geqq 6$

これをみたす n の範囲は $n \geqq 3$ より

$3 \leqq n \leqq 4$ …(答)

医学科 [Ⅱ]

$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=2$ $\cdots(*)$ とする

(i) $c=1$ のとき $(*)$ は $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=1$ であるが、

$1+\dfrac{1}{a}>1,\ 1+\dfrac{1}{b}>1$ より これをみたす (a,b) は存在しない。

(ii) $c=2$ のとき $(*)$ は $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=2$

$3(a+1)(b+1)=4ab$ $\therefore ab-a-b+3=0$

$\therefore (a-3)(b-3)=12$

$a\geqq b\geqq c$ から $a-3\geqq b-3\geqq -2$

$(a-3,b-3)=(12,1),(6,2),(4,3)$

$\therefore (a,b)=(15,4),(9,5),(7,6)$

(iii) $c=3$ のとき $(*)$ は $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=2$

(i)と同様に計算して

$(a,b)=(8,3),(5,4)$ を得る

(iv) $c\geqq 4$ のとき $a\geqq b\geqq c\geqq 4$ より

$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\leqq\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{125}{64}<2$

であるから、$(*)$ をみたす (a,b,c) の組は存在しない

(i)〜(iv) より

$(a,b,c)=(15,4,2),(9,5,2),(7,6,2)$ $\cdots$(答)

$(8,3,3),(5,4,3)$

医学科 [III]

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,dt = \cos(ax)-b \quad \cdots (*)$$ とする

(1) (*) より

$$x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x t f(t)\,dt = \cos(ax)-b$$

両辺を x で微分して

$$1\times\int_a^x f(t)\,dt + x\times f(x) - xf(x) = -a\sin(ax)$$

すなわち $$\int_a^x f(t)\,dt = -a\sin(ax) \quad \cdots (**)$$

(*), (**) の両辺に $x=a$ を代入して

$$\cos a^2 - b = 0 \quad \cdots ①$$

$$-a\sin a^2 = 0 \quad \cdots ②$$

②で $0<a^2<4$ より $a^2=\pi$ 　$a>0$ より $a=\sqrt{\pi}$

①に代入して $-1-b=0$ 　$\therefore b=-1$

$\therefore$ $\underline{a=\sqrt{\pi},\ b=-1}$ $\cdots$(答)

(2) (**) の両辺を x で微分して

$$f(x) = -a^2\cos(ax) = \underline{-\pi\cos(\sqrt{\pi}x)} \cdots (答)$$

(3) $f(x)$ が最大値をとる x は (2) より

$\cos(\sqrt{\pi}x)$ が最小値をとるとき，n を整数として

$\sqrt{\pi}x = (2n-1)\pi$ から $x=(2n-1)\sqrt{\pi}$

$\therefore$ $\underline{x=(2n-1)\sqrt{\pi}\ (n は整数)}$ $\cdots$(答)

医学科 [IV]

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x}$ より $f'(x)=0$ となるのは $x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↗	極大	↘

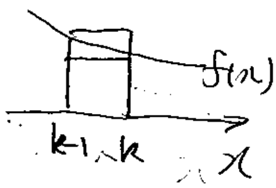
増減は表のとおり

$x=e$ のとき 極大値 $\dfrac{1}{e}$ …(答)

(2) $k\geqq 4$ のとき $k-1\leqq x\leqq k$ において $f(x)$ は単調減少だから

$f(k)\leqq f(x)\leqq f(k-1)$

$\dfrac{\log k}{k}\leqq\dfrac{\log x}{x}\leqq\dfrac{\log(k-1)}{k-1}$



ゆえに $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\log k}{k}dx\leqq\int_{k-1}^{k}\frac{\log x}{x}dx\leqq\int_{k-1}^{k}\frac{\log(k-1)}{k-1}dx$

すなわち $\displaystyle\frac{\log k}{k}\leqq\int_{k-1}^{k}\frac{\log x}{x}dx\leqq\frac{\log(k-1)}{k-1}$

$k=4,5,\cdots,n$ を代入し辺々加えると

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{\log k}{k}\leqq\int_{3}^{n}\frac{\log x}{x}dx\leqq\sum_{k=3}^{n-1}\frac{\log k}{k}$$

よって $\displaystyle S_n-\frac{\log 3}{3}\leqq\int_{3}^{n}\frac{\log x}{x}dx\leqq S_{n-1}$ (証明終)

(3) $\displaystyle\int_{3}^{n}\frac{\log x}{x}dx=\int_{3}^{n}\log x(\log x)'dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_{3}^{n}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}(\log n)^2-\frac{1}{2}(\log 3)^2$

また $S_n=S_{n-1}+\dfrac{\log n}{n}$ より $n\geqq 4$ から $\dfrac{\log n}{n}>0$

$\therefore S_{n-1}<S_n$

(2) より $\displaystyle S_n-\frac{\log 3}{3}\leqq\frac{1}{2}(\log n)^2-\frac{1}{2}(\log 3)^2\leqq S_{n-1}<S_n$

$\displaystyle\therefore\ \frac{1}{2}(\log n)^2-\frac{1}{2}(\log 3)^2<S_n\leqq\frac{1}{2}(\log n)^2-\frac{1}{2}(\log 3)^2+\frac{\log 3}{3}$

$$\therefore \frac{1}{2}-\frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2} < \frac{S_n}{(\log n)^2} < \frac{1}{2}-\frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2}+\frac{\log 3}{3(\log n)^2}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2}+\frac{\log 3}{3(\log n)^2}\right\}=\frac{1}{2}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(\log n)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2} \quad \cdots(答)}}$$