数　学　　解　答　用　紙

〔物質科学科，地球資源環境学科
機械・電気電子工学科
建築・生産設計工学科〕，教育

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

1

(1) $n=5$ のとき

線分の数は ${}_5C_2 = \underline{\underline{10\text{本}}}$ …(答)

異なる2本の線分の組は ${}_{10}C_2 = \underline{\underline{45\text{組}}}$ …(答)

∴ 求める確率は $\dfrac{5}{45} = \underline{\underline{\dfrac{1}{9}}}$ …(答)

(2) 線分の数は ${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 本

異なる2本の線分の組は ${}_{\frac{1}{2}n(n-1)}C_2 = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$ 組

円周上の4点を選ぶのと，円内部で交わる線分の組は1つ決まる

∴ ${}_nC_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$

求める確率は

$$\frac{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{n-3}{3(n+1)}}} \cdots (\text{答})$$

数 学　解 答 用 紙

医学科，物質科学科

$\boxed{2}$

(1) 異なる2点 $(-3,-3)$，(a,b) を通る直線の方程式は，

(i) $a=-3$ のとき，　$x=-3$

(ii) $a\neq -3$ のとき，　$y+3=\dfrac{b+3}{a+3}(x+3)$

$$(a+3)(y+3)=(b+3)(x+3)$$

$$\therefore\ (b+3)x-(a+3)y=3(a-b)\ \cdots ①$$

①は，(i)の $a=-3$ のときも満たすことより，以上(i)(ii)から，

求める直線の方程式は，　$\underline{\underline{(b+3)x-(a+3)y=3(a-b)}}$ ---(答)

(2) $\begin{cases} x=2\cos t & \text{---}② \\ y=-\sin^2 t & \text{---}③ \end{cases}$ とおく

②より　すべての実数 t に対して，$-2\leqq x\leqq 2$

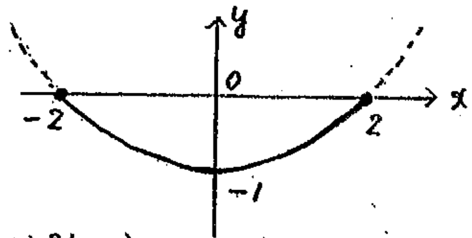
③より　$y=-\sin^2 t=-(1-\cos^2 t)$

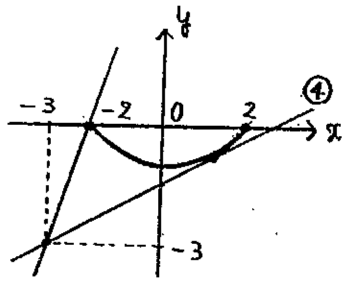
③より　$\cos t=\frac{1}{2}x$ だから

$$=-1+\frac{1}{4}x^2$$

よって，　$y=-1+\frac{1}{4}x^2$，$(-2\leqq x\leqq 2)$ となり，

曲線の概形は，





(3) ②，③より　$f(t)=\dfrac{-\sin^2 t+3}{2\cos t+3}=\dfrac{y+3}{x+3}$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

$f(t)=k$ とおくと　$\dfrac{y+3}{x+3}=k$　$\therefore\ y=kx+3k-3\ \cdots ④$

このとき，$y=-1+\frac{1}{4}x^2$ と 定点 $(-3,-3)$ を通り，傾き k の直線④が共有点をもつような k の値の範囲は，グラフの考察より

(i) 点 $(-2,0)$ を④を通るのは，　$0=-2k+3k-3$　$\therefore\ k=3$

(ii) $y=-1+\frac{1}{4}x^2$ と④が接するのは，

$$-1+\frac{1}{4}x^2=kx+3k-3$$

$$x^2-4kx-12k+8=0$$

この2次方程式の判別式を D とおくと

$$D/4=4k^2+12k-8=0\quad \therefore\ k=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

グラフより，$k>0$ だから　$k=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

以上(i)(ii)より　$\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\leqq k\leqq 3$

したがって，関数 $f(t)$ について，$\underline{\underline{最大値\ 3，最小値\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}}$ ---(答)

数 学　解 答 用 紙

物質科学科

3 (1) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ …… ①　　$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ …… ②

① より $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ なので これと ② より

$A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ …… ③

①.③ より $A\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ …… (答)

(2) (1) より $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ なので

$B=\frac{1}{2}A^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\pi&-\sin\pi\\\sin\pi&\cos\pi\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{2}E \quad \left(E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

$P_1(1,0)$ より P_2 は $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\therefore P_2\left(-\frac{1}{2},0\right)$

P_3 は $B^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2E^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\therefore P_3\left(\frac{1}{4},0\right)$

繰り返し用いれば P_n は

$B^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}E^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

よって $P_n\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},0\right)$ …… (答)

(3) $y=x^2$ 上の点 (t,t^2) における接線の方程式は

$y'=2x$ より $y-t^2=2t(x-t)$ $(t\neq 0)$

これが P_n を通るので $-t^2=2t\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-t\right\}$

$\therefore t\left\{t-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$　$t\neq 0$ より $t=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $a_n=4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$　$\left(\because \left|-\frac{1}{2}\right|<1 \text{ より}\right)$

$=\frac{8}{3}$ …… (答)