数 学 解 答 用 紙

〔物質科学科，地球資源環境学科
機械・電気電子工学科
建築・生産設計工学科〕，教育

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

1

(1) $n=5$ のとき

線分の数は ${}_5C_2 = \underline{10\text{本}}$ …(答)

異なる2本の線分の組は ${}_{10}C_2 = \underline{45\text{組}}$ …(答)

求める確率は $\dfrac{5}{45} = \underline{\dfrac{1}{9}}$ …(答)

(2) 線分の数は ${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 本

異なる2本の線分の組は ${}_{\frac{1}{2}n(n-1)}C_2 = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$ 組

円周上の4点を選ぶごと、円内部で交わる線分の組は1つ決まる

$\therefore\ {}_nC_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$

求める確率は

$$\frac{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)}$$

$$= \underline{\frac{n-3}{3(n+1)}} \quad \cdots(\text{答})$$

数 学 解 答 用 紙

数理，教育

2

(1) $f'(x) = a(x-1)(x-3)$ とおける

$f'(x) = a(x^2-4x+3)$ これの両辺を x について積分して

$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C$ （Cは積分定数）

$f(0) = 1$ より $C = 1$

このとき，$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + 1$

また，$f(1) = 3$ より

$f(1) = \frac{a}{3} - 2a + 3a + 1 = 3$ これより $a = \frac{3}{2}$

したがって，$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1}}$ …(答)

(2) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

点$(t, f(t))$における接線の方程式は

$y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2}\right)(x-t) + \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t + 1$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2}\right)x - t^3 + 3t^2 + 1}}$ …(答)

(3) (2)で求めた方程式が原点を通るので

$0 = -t^3 + 3t^2 + 1$

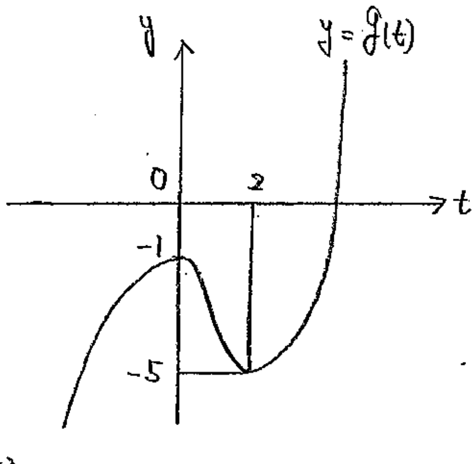
$\begin{cases} y = g(t) = t^3 - 3t^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$ の共有点の個数が，求める直線の本数である。

$g'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

$g'(t) = 0$ とおくと $t = 0, 2$.

このとき，増減表は，次のようになる。

t	…	0	…	2	…
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	−1	↘	−5	↗



$y = g(t)$ のグラフは右図のようになる。

以上より求める本数は $\underline{1本}$ …(答)

数 学　解 答 用 紙

数理，教育

3　$a_1=1$，$b_1=0$，$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n \\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n \end{cases}$ …①

(1)　$C_n(a_n, b_n)$ より，$|\overrightarrow{OC_n}|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ …②

また，$C_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ だから，

$|\overrightarrow{OC_{n+1}}|=\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$

①より

$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)}$

②より

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC_n}|$

よって 数列 $\{|\overrightarrow{OC_n}|\}$ は，初項 $|\overrightarrow{OC_1}|=1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となっているから，

$|\overrightarrow{OC_n}|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …(答)

(2)　求めるなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，

$\overrightarrow{OC_n}\cdot\overrightarrow{OC_{n+1}}=|\overrightarrow{OC_n}||\overrightarrow{OC_{n+1}}|\cos\theta$

(1)の結果，①より

$a_na_{n+1}+b_nb_{n+1}=a_n\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)+b_n\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\theta$

$\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2\cos\theta$

$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\theta=\frac{\pi}{3}$ …(答)

(3)　$S_n=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC_n}||\overrightarrow{OC_{n+1}}|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

題意から，$S_n\leqq\frac{1}{2^{2013}}$ より

$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leqq\frac{1}{2^{2013}}$

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leqq\left(\frac{1}{2^{1006}}\right)^2$

$\therefore\ 2^n\geqq\sqrt{3}\cdot2^{1006}$ …③

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より，$2^{1006}<\sqrt{3}\cdot2^{1006}<2^{1007}$ だから，

③をみたす最小の n は，$n=1007$ …(答)