数 学 解 答 用 紙

（数理・情報システム学科），医学科

（前 期 日 程）

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

1

(1) $k-l+1$ 個の自然数から残りの1個を取り出して並べる

(i) l を取り出したとき

l, k, l を並べて 3通り

(ii) k を取り出したとき

l, k, k を並べて 3通り

(iii) l と k 以外を取り出したとき

取り出し方は $k-l-1$ 通りなので

並べ方は $(k-l-1)\times 3! = 6(k-l-1)$ 通り

(i)(ii)(iii) より $3+3+6(k-l-1) = 6(k-l)$

よって求める総数は $\underline{\underline{6(k-l)}}$ …(答)

(2) $R=0$ となる場合の数は 6

$R=1, 2, 3, 4, 5$ となる場合の数は (1) を利用して

$R=1$ … $6(2-1)\times 5 = 30$

$R=2$ … $6(3-1)\times 4 = 48$

$R=3$ … $6(4-1)\times 3 = 54$

$R=4$ … $6(5-1)\times 2 = 48$

$R=5$ … $6(6-1) = 30$

すべての場合の数は 6^3 なので、求める期待値は

$$0\times\frac{6}{6^3} + 1\times\frac{30}{6^3} + 2\times\frac{48}{6^3} + 3\times\frac{54}{6^3} + 4\times\frac{48}{6^3} + 5\times\frac{30}{6^3}$$

$= \underline{\underline{\dfrac{35}{12}}}$ …(答)

数 学 解 答 用 紙

数理，教育

2

(1) $f'(x) = a(x-1)(x-3)$ とおける

$f'(x) = a(x^2-4x+3)$ これの両辺を x について積分して

$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C$ （Cは積分定数）

$f(0) = 1$ より $C = 1$

このとき，$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + 1$

また，$f(1) = 3$ より

$f(1) = \frac{a}{3} - 2a + 3a + 1 = 3$ これより $a = \frac{3}{2}$

したがって，$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1}}$ …（答）

(2) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2}\right)(x-t) + \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t + 1$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{y = \left(\frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2}\right)x - t^3 + 3t^2 + 1}}$ …（答）

(3) (2) で求めた方程式が原点を通るので

$0 = -t^3 + 3t^2 + 1$

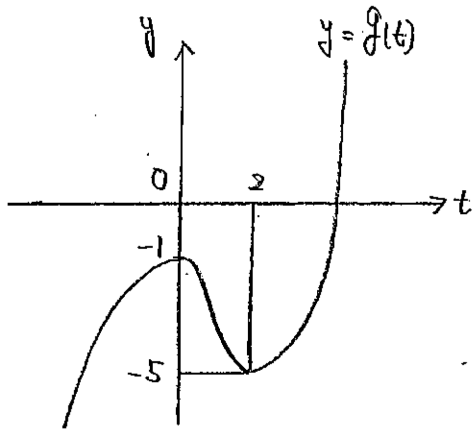
$\begin{cases} y = g(t) = t^3 - 3t^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$ の共有点の個数が，求める直線の本数である。

$g'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

$g'(t) = 0$ とおくと $t = 0, 2$

このとき，増減表は，次のようになる。

t	…	0	…	2	…
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	−1	↘	−5	↗



$y = g(t)$ のグラフは右図のようになる。

以上より求める本数は $\underline{\underline{1本}}$ …（答）

数 学　解 答 用 紙

数理，教育

$\boxed{3}$ 　$a_1=1$，$b_1=0$，$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n \\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n \end{cases}$ …①

(1) $C_n(a_n, b_n)$ より，$|\overrightarrow{OC_n}|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ …②

また，$C_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ だから，

$|\overrightarrow{OC_{n+1}}|=\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$

①より

$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)}$

②より

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC_n}|$

よって 数列 $\{|\overrightarrow{OC_n}|\}$ は，初項 $|\overrightarrow{OC_1}|=1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となっているから，

$|\overrightarrow{OC_n}|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …(答)

(2) 求めるなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，

$\overrightarrow{OC_n}\cdot\overrightarrow{OC_{n+1}}=|\overrightarrow{OC_n}||\overrightarrow{OC_{n+1}}|\cos\theta$

(1)の結果，①より

$a_na_{n+1}+b_nb_{n+1}=a_n\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)+b_n\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\theta$

$\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2\cos\theta$

$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\theta=\frac{\pi}{3}$ …(答)

(3) $S_n=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC_n}||\overrightarrow{OC_{n+1}}|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

題意から，$S_n\leqq\frac{1}{2^{2013}}$ より

$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leqq\frac{1}{2^{2013}}$

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leqq\left(\frac{1}{2^{1006}}\right)^2$

$\therefore\ 2^n\geqq\sqrt{3}\cdot2^{1006}$ …③

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より，$2^{1006}<\sqrt{3}\cdot2^{1006}<2^{1007}$ だから，

③をみたす最小の n は，$n=1007$ …(答)

数 学 解 答 用 紙

医学科，数理

4 (1) $f(x)=\begin{cases} x\log(1-x) & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -x\log(1-x) & (x<0) \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\log(1-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}(-\log(1-x))=0 \end{cases}$

よって，$f(x)$は$x=0$で微分可能で $f'(0)=0$ である。-----(答)

(2) $|x|\log(1-x)=-x$ より，$x=0$は解である。• $1>x>0$のとき，$\log(1-x)=-1$

よって，$x=1-\frac{1}{e}$。これは，$1>x>0$を満たす。

• $x<0$のとき，$\log(1-x)=1$ $\therefore x=1-e$。これは，$x<0$を満たす。

よって，求める交点は，$(0,0)$，$\left(1-\frac{1}{e},\frac{1}{e}-1\right)$，$(1-e,e-1)$ ------(答)

(3)
$$\begin{aligned}\int x\log(1-x)dx &= \frac{1}{2}x^2\log(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(1-x)+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}-x-1\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1-x)-\frac{1}{4}(x+1)^2+C \end{aligned}$$
.....(答)

(C：積分定数)

(4) $x\leqq0$のとき，$f(x)=-x\log(1-x)$ より，$f(x)-(-x)=x(1-\log(1-x))$

を考える。• $x<1-e$のとき，$e<1-x$であるから，常に$f(x)>-x$が成り立つ。

• $1-e\leqq x\leqq0$ のとき，$f(x)\leqq-x$ が成り立つ。

よって，(2)より2つのグラフで囲まれるのは，$1-e\leqq x\leqq0$ のときのみである。

$S=\int_{1-e}^{0}(-x-f(x))dx=\int_{1-e}^{0}\{x\log(1-x)-x\}dx$。(3)より

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{1}{2}x^2\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1-x)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}x^2\right]_{1-e}^{0} \\ &= -\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}(1-e)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(2-e)^2-\frac{1}{2}(1-e)^2\right\} \\ &= \frac{e^2}{4}-e+\frac{5}{4} \end{aligned}$$
-----(答)