鳥取・医[I]，地域[IV].

[I]
[IV]

(1) $7x+13y=1111$

$$
\begin{array}{rl}
 & 7x+13y=1111 \\
-) & 7\times12+13\times79=1111 \\ \hline
 & 7(x-12)+13(y-79)=0
\end{array}
$$

$$7(x-12)=13(79-y)$$

7と13は互いに素なので

$$\begin{cases} x-12=13k \iff x=13k+12 \\ 79-y=7k \iff y=79-7k \end{cases}$$ （kは任意の整数） —— ①

x, y ともに自然数なので $13k+12>0$ かつ $79-7k>0$ より

k は $0\leqq k\leqq 11$ の自然数なので 12組 …(答)

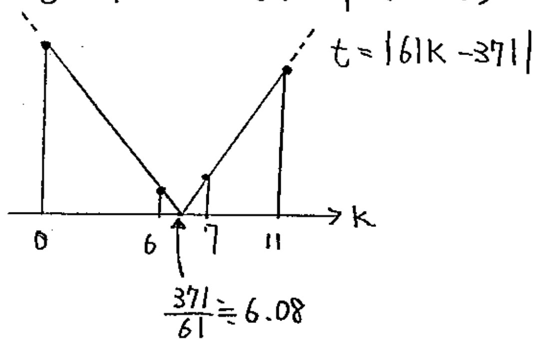
(2) $s=-x+2y=-(13k+12)+2(79-2k)=-27k+146$ （∵①より）

$0\leqq k\leqq 11$ より

$$\begin{cases} k=0 \text{ のとき最大で } 146 \\ k=11 \text{ のとき最小で } -151 \end{cases}$$

したがって，sの最大値 146，最小値 −151 …(答)

(3) $t=|2x-5y|=|2(13k+12)-5(79-5k)|=|61k-371|$ （∵①より）



$t=|61k-371|$ を $0\leqq k\leqq 11$ でグラフを書くと左図のようになる。
最小値は $k=6, 7$ のいずれかであり，
最大値は $k=0, 11$ のいずれかである。

$$\begin{cases} k=6 \text{ のとき } |-5|=5 \\ k=7 \text{ のとき } |56|=56 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=0 \text{ のとき } |-371|=371 \\ k=11 \text{ のとき } |300|=300 \end{cases}$$

したがって，tの最大値 371，最小値 5 …(答)

過去・医[II]，工[II]，地域[III]

[II]
[III]

$a_1 = 1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n^2} = 3^n$ …① とおく.

(1) ①の両辺を底3の対数をとると、

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \log_3 3^n$$

$$\log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n = n$$

ここで，$b_n = \log_3 a_n$ とおくことより．（$b_1 = 0$）

$$b_{n+1} - 2b_n = n$$
$$b_{n+1} = 2b_n + n \quad \cdots ②$$

このとき，$b_{n+1} - \{\alpha(n+1)+\beta\} = 2\{b_n - (\alpha n+\beta)\}$ とおると．

$$b_{n+1} = 2b_n - \alpha n + \alpha - \beta$$

②より $\begin{cases} -\alpha = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$ ∴ $\alpha = \beta = -1$

だから ②は．$b_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(b_n + n + 1)$ …③

と変形できる。

よって．数列 $\{b_n + n + 1\}$ は、初項 $b_1 + 1 + 1 = 2$，公比2の等比数列より

$$b_n + n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって．$\underline{b_n = 2^n - n - 1}$ …(答)

(2) $a_n \geqq 10^{100}$

両辺を底3の対数をとると．（底3>1 だから）

$$\log_3 a_n \geqq \log_3 10^{100}$$

$$b_n \geqq 100\log_{10} 3 = 100 \div 0.4771 \fallingdotseq 209.5$$

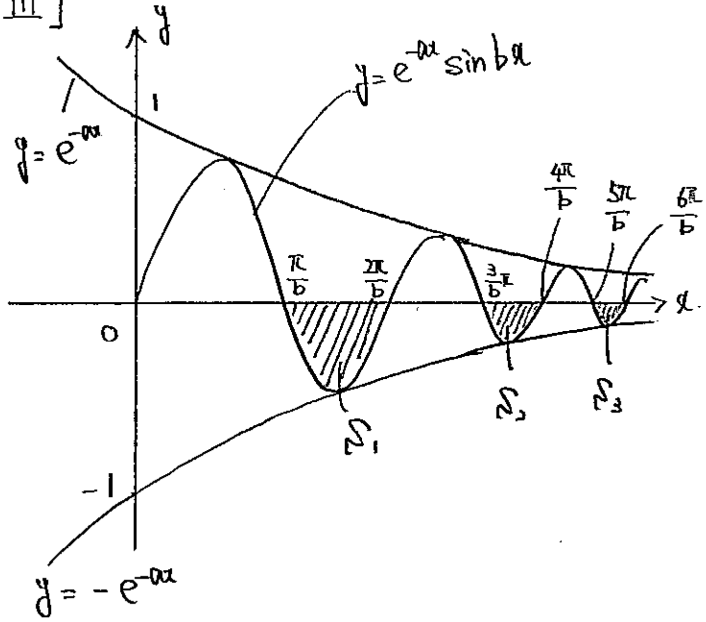
ここで，(2)の結果から．

$$b_7 = 2^7 - 7 - 1 = 120$$
$$b_8 = 2^8 - 8 - 1 = 247$$

よって．$b_7 < 209.5 < b_8$ だから．

<u>求める最小のnは．$n = 8$</u> …(答)

[III]



$\frac{(2k-1)\pi}{b} \leqq x \leqq \frac{2k\pi}{b}$ の面積 S_n を求める。

$$S_n = \int_{\frac{(2n-1)\pi}{b}}^{\frac{2n\pi}{b}} \{0 - e^{-ax}\sin bx\}\,dx$$

$$S_n = -\int_{\frac{(2n-1)\pi}{b}}^{\frac{2n\pi}{b}} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad \text{—(\#)}$$

ここで $\int e^{-ax}\sin bx\,dx$ を求める。

$$\begin{cases} (e^{-ax}\sin bx)' = -ae^{-ax}\sin bx + be^{-ax}\cos bx & \text{—— ①} \\ (e^{-ax}\cos bx)' = -ae^{-ax}\cos bx - be^{-ax}\sin bx & \text{—— ②} \end{cases}$$

①×a ＋ ②×b より

$$\begin{array}{rl} ①\times a: & (ae^{-ax}\sin bx)' = -a^2e^{-ax}\sin bx + abe^{-ax}\cos bx \\ +)\ ②\times b: & (be^{-ax}\cos bx)' = -abe^{-ax}\cos bx - b^2e^{-ax}\sin bx \\ \hline & \{e^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx)\}' = -(a^2+b^2)e^{-ax}\sin bx \end{array}$$

したがって，$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{a^2+b^2}e^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx) + C$ （Cは積分定数）

(#) より

$$S_n = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[e^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx)\Big]_{\frac{(2n-1)\pi}{b}}^{\frac{2n\pi}{b}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{-\frac{2na}{b}\pi}\times b\cos 2n\pi - e^{-\frac{(2n-1)a}{b}\pi}\times b\cos(2n-1)\pi\right\}$$

$$S_n = \frac{b}{a^2+b^2}\left(1+e^{\frac{a}{b}\pi}\right)e^{-\frac{2a}{b}n\pi}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項 $\frac{b}{a^2+b^2}\left(1+e^{\frac{a}{b}\pi}\right)e^{-\frac{2a}{b}\pi}$，公比 $e^{-\frac{2a}{b}\pi}$ の無限等比級数

で $\left|e^{-\frac{2a}{b}\pi}\right| < 1$ より収束する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{b}{a^2+b^2}\left(1+e^{\frac{a}{b}\pi}\right)e^{-\frac{2a}{b}\pi}}{1 - e^{-\frac{2a}{b}\pi}}$$

$$= \frac{b}{(a^2+b^2)\left(e^{\frac{a}{b}\pi}-1\right)} \quad \cdots\text{(答)}$$

鳥取・医

[IV]

(1) $\{\alpha(t)\}^2-\{\beta(t)\}^2=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}-\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ （証明終わり）

$$z=\frac{ip\alpha(t)+\beta(t)}{ip\beta(t)+\alpha(t)}=\frac{\{ip\alpha(t)+\beta(t)\}\{-ip\beta(t)+\alpha(t)\}}{\{ip\beta(t)+\alpha(t)\}\{-ip\beta(t)+\alpha(t)\}}$$

$$=\frac{p^2\alpha(t)\times\beta(t)+ip\{\alpha(t)\}^2-ip\{\beta(t)\}^2+\alpha(t)\times\beta(t)}{p^2\{\beta(t)\}^2+\{\alpha(t)\}^2}$$

$$=\frac{(p^2+1)\alpha(t)\times\beta(t)+ip}{p^2\{\beta(t)\}^2+\{\alpha(t)\}^2}\quad(\because \{\alpha(t)\}^2-\{\beta(t)\}^2=1\ より)$$

$x=\dfrac{(p^2+1)\alpha(t)\times\beta(t)}{p^2\{\beta(t)\}^2+\{\alpha(t)\}^2}$, $y=\dfrac{p}{p^2\{\beta(t)\}^2+\{\alpha(t)\}^2}$ とおくので

$$x=\frac{(p^2+1)\times\frac{e^t+e^{-t}}{2}\times\frac{e^t-e^{-t}}{2}}{p^2\times\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}+\frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}}=\underline{\underline{\frac{(p^2+1)(e^{2t}-e^{-2t})}{(p^2+1)(e^{2t}+e^{-2t})-2(p^2-1)}}}\ \cdots(答)$$

同様にして $y=\underline{\underline{\dfrac{4p}{(p^2+1)(e^{2t}+e^{-2t})-2(p^2-1)}}}$ …(答)

(2) (1)の結果の x を①，y を②とおく．

①の分子，分母を e^{2t} で割って

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}\frac{(p^2+1)\left(1-\frac{1}{e^{4t}}\right)}{(p^2+1)\left(1+\frac{1}{e^{4t}}\right)-2(p^2-1)\times\frac{1}{e^{2t}}}=\underline{\underline{1}}\ \cdots(答)$$

また，①において $t=-s$ とおくと $t\to-\infty$ のとき，$s\to+\infty$ だから，

$$\lim_{t\to-\infty}x=\lim_{s\to+\infty}\frac{(p^2+1)(e^{-2s}-e^{2s})}{(p^2+1)(e^{-2s}+e^{2s})-2(p^2-1)}=\lim_{s\to+\infty}\frac{-(p^2+1)(e^{2s}-e^{-2s})}{(p^2+1)(e^{2s}+e^{-2s})-2(p^2-1)}=\underline{\underline{-1}}\ \cdots(答)$$

(3) $p\neq0$ より $y\neq0$ だから

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{p^2+1}{4p}(e^{2t}-e^{-2t})$ より $e^{2t}-e^{-2t}=\dfrac{4p}{p^2+1}\times\dfrac{x}{y}$ ―― ③

また，②より

$\dfrac{4p}{y}=(p^2+1)(e^{2t}+e^{-2t})-2(p^2-1)$ だから，

$e^{2t}+e^{-2t}=\dfrac{1}{p^2+1}\left\{\dfrac{4p}{y}+2(p^2-1)\right\}$ ―― ④

今. $\{\alpha(2t)\}^2 - \{\beta(2t)\}^2 = 1$ が成り立つので

$(e^{2t} + e^{-2t})^2 - (e^{2t} - e^{-2t})^2 = 4$ が成り立つ.

③, ④ より

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}\left\{\frac{4p}{y} + 2(p^2-1)\right\}^2 - \frac{16p^2}{(p^2+1)^2} \times \frac{x^2}{y^2} = 4$$

$$\{4p + 2(p^2-1)y\}^2 - 16p^2x^2 = 4(p^2+1)^2y^2$$

$$(p^2+1)^2y^2 + 4p^2x^2 - \{(p^2-1)y + 2p\}^2 = 0$$

$$(p^2+1)^2y^2 + 4p^2x^2 - (p^2-1)^2y^2 - 4p(p^2-1)y - 4p^2 = 0$$

$$4p^2y^2 + 4p^2x^2 - 4p(p^2-1)y - 4p^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - \left(p - \frac{1}{p}\right)y - 1 = 0}} \quad \cdots (答)$$