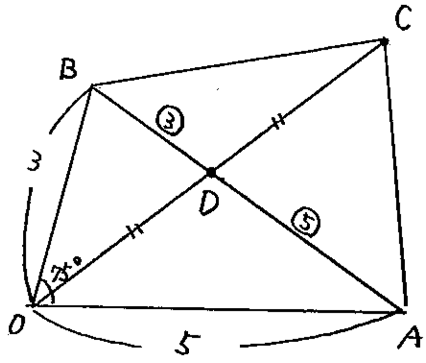
鳥取・工[I]，地域[II]

[I] $4\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$ …①

[II]



(1) ①より

$$4\overrightarrow{OC}+3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+5(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{0}$$

$$4\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$$

よって，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{4}$$ …(答)

(2) (1)の結果より

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}(3\vec{a}+5\vec{b})=\frac{8}{4}\cdot\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}$$

$$=2\cdot\frac{3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{5+3}$$

ここで，点Dを線分ABを $AD:DB=5:3$ に内分する点とすると，

$$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$$

と表されることより

$AD:DB=5:3$，$OD:DC=1:1$ …(答)

(3) 加法定理より $\sin 75^\circ=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(1)より $OD:DC=1:1$ だから $\triangle OAB:\triangle CAB=1:1$ となり

$$(\text{四角形OACBの面積})=\triangle OAB+\triangle CAB$$

$$=2(\triangle OAB)=2\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

また、同様にして，(1)より $AD:DB=5:3$ だから，$\triangle OAC:\triangle OBC=5:3$

よって，

$$(\triangle OAC\text{の面積})=\frac{5}{8}(\text{四角形OACBの面積})$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$=\frac{75(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{32}$$

したがって，

四角形OACBの面積 $\dfrac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$，$\triangle OAC$の面積 $\dfrac{75(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{32}$ …(答)

鳥取・医[II]，工[II]，地域[III]

[II]
[III]

$a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n^2}=3^n$ $\cdots$ ① とおく．

(1) ①の両辺を底3の対数をとると，

$$\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n^2}=\log_3 3^n$$

$$\log_3 a_{n+1}-2\log_3 a_n=n$$

ここで，$b_n=\log_3 a_n$ とおくことより．（$b_1=0$）

$$b_{n+1}-2b_n=n$$

$$b_{n+1}=2b_n+n \quad \cdots ②$$

このとき，$b_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{b_n-(\alpha n+\beta)\}$ とおると．

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha n+\alpha-\beta$$

②より $\begin{cases}-\alpha=1\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$ $\therefore$ $\alpha=\beta=-1$

だから ②は．$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$ $\cdots$ ③

と変形できる。

よって．数列 $\{b_n+n+1\}$ は，初項 $b_1+1+1=2$，公比 2 の等比数列より

$$b_n+n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

したがって，$\underline{\underline{b_n=2^n-n-1}}$ $\cdots$（答）

(2) $a_n\geqq 10^{100}$

両辺を底3の対数をとると．（底$3>1$ だから）

$$\log_3 a_n\geqq\log_3 10^{100}$$

$$b_n\geqq 100\log_{10}3=100\div 0.4771\fallingdotseq 209.5$$

ここで，(2)の結果から．

$$b_7=2^7-7-1=120$$

$$b_8=2^8-8-1=247$$

よって．$b_7<209.5<b_8$ だから．

$\underline{\underline{\text{求める最小の}n\text{は．}n=8}}$ $\cdots$（答）

急阪・工

[Ⅲ]. $0 \leqq x \leqq 2\pi$,　$f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2}+\sin x}$

(1)　$f'(x) = \dfrac{-\sin x(\sqrt{2}+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(\sqrt{2}+\sin x)^2} = \dfrac{-1-\sqrt{2}\sin x}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$

$f'(x) = 0$ とおくと、$-1-\sqrt{2}\sin x = 0$

$\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より　$x = \dfrac{5}{4}\pi$, $\dfrac{7}{4}\pi$

このとき, 増減表は.

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

極小値 $f(\frac{5}{4}\pi) = -1 < f(0) = f(2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} <$ 極大値 $f(\frac{7}{4}\pi) = 1$

だから.

$\begin{cases} x = \frac{7}{4}\pi \text{ のとき, 最大値 } 1 \\ x = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき, 最小値 } -1. \end{cases}$ --- (答)

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{2}+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{2}+\sin x)'}{\sqrt{2}+\sin x}\,dx$

$= \Big[\log|\sqrt{2}+\sin x| \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \log(\sqrt{2}+1) - \log\sqrt{2}$

$= \log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

$= \log\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ ...(答)

鳥取・工

[IV]

(1) $I = \int (-e^{-x})' \sin x \, dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x \, dx$

$I = J - e^{-x}\sin x$

$J = \int (-e^{-x})' \cos x \, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x \, dx$

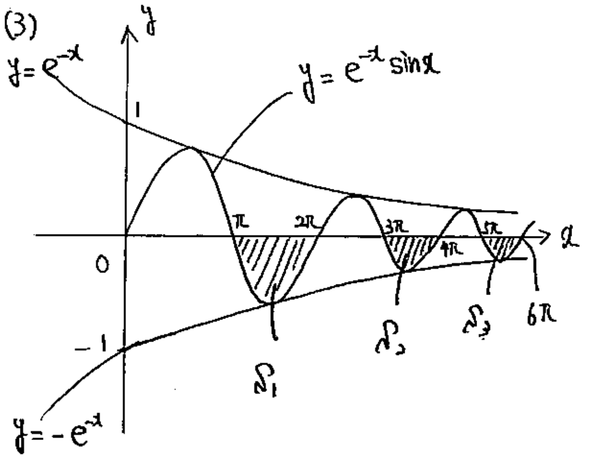
$J = -I - e^{-x}\cos x$ （証明終わり）

(2) (1) より $\begin{cases} I + J = -e^{-x}\cos x & \text{——①} \\ I - J = -e^{-x}\sin x & \text{——②} \end{cases}$

① + ② より $\underline{\underline{I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1 \ (C_1 \text{は積分定数})}}$ …(答)

① − ② より $\underline{\underline{J = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + C_2 \ (C_2 \text{は積分定数})}}$ …(答)

(3)



$(2n-1)\pi \leqq x \leqq 2n\pi$ の面積 S_n を求める。

$S_n = \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \{0 - e^{-x}\sin x\} dx$

$= -\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} e^{-x}\sin x \, dx$

$= \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}$ （∵ (2) より）

$= \frac{1}{2}\left\{e^{-2n\pi}\cos 2n\pi - e^{-(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi\right\}$

$S_n = \frac{1}{2}(1+e^{\pi})e^{-2n\pi}$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項 $\frac{1}{2}(1+e^{\pi})e^{-2\pi}$，公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数で $|e^{-2\pi}|<1$ より収束する。

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{\frac{1}{2}(1+e^{\pi})e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{e^{\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{e^{\pi}+1}{(e^{\pi}+1)(e^{\pi}-1)}$

$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2(e^{\pi}-1)}}}$ …(答)