鳥取・地域

[I]

(1) $x^2+\sqrt{2}x+1=0$ より

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\times1\times1}}{2}=\underline{\underline{\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}}}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 題意より $\alpha=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$, $\beta=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ とおける。

(ア) $\alpha^2=\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1-2-1}{2}=-i$ なので $\alpha^4=(-i)^2=i^2\underline{\underline{=-1}}$ $\cdots$(答)

(イ) $\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-1)^2\underline{\underline{=1}}$ $\cdots$(答)

(ウ) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=-\sqrt{2}$, $\underline{\underline{\alpha\beta=1}}$ $\cdots$(答)

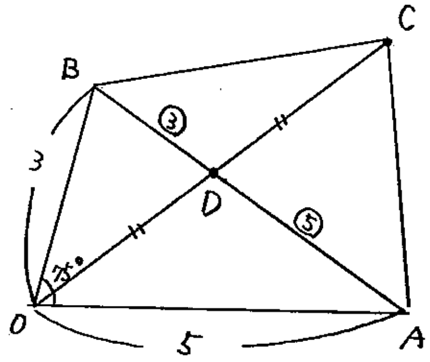
(エ) $\alpha^{1010}=(\alpha^8)^{126}\times\alpha^2=\underline{\underline{-i}}$ $\cdots$(答)

(オ) $\alpha^{2017}\beta^{2013}=\alpha^4\times(\alpha\beta)^{2013}=\alpha^4\underline{\underline{=-1}}$ $\cdots$(答)

鳥取・工[I]，地域[II]

[I]　$4\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}=\vec{0}$　…①

[II]



(1)　①より

$$4\overrightarrow{OC}+3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+5(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$$

よって，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{4}$$　…（答）

(2)　(1)の結果より

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}(3\vec{a}+5\vec{b})=\frac{8}{4}\cdot\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}$$

$$=2\cdot\frac{3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}}{5+3}$$

ここで，点Dを線分ABを $AD:DB=5:3$ に内分する点とすると，

$$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$$

と表されることより

$AD:DB=5:3$，$OD:DC=1:1$　…（答）

(3)　加法定理より　$\sin 75^\circ=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(1)より　$OD:DC=1:1$　だから　$\triangle OAB:\triangle CAB=1:1$　となり

$$(\text{四角形OACBの面積})=\triangle OAB+\triangle CAB$$

$$=2(\triangle OAB)=2\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

また，同様にして，(1)より $AD:DB=5:3$ だから，$\triangle OAC:\triangle OBC=5:3$

よって，

$$(\triangle OAC\text{の面積})=\frac{5}{8}(\text{四角形OACBの面積})$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$=\frac{75(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{32}$$

したがって，

四角形OACBの面積 $\dfrac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$，　$\triangle OAC$の面積 $\dfrac{75(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{32}$　…（答）

島取・医[II]，工[II]，地域[III]

[II] $a_1=1$， $\dfrac{a_{n+1}}{a_n^2}=3^n$ ---① とおく.

[III]

(1) ①の両辺を底3の対数をとると、

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \log_3 3^n$$

$$\log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n = n$$

ここで，$b_n=\log_3 a_n$ とおくことより．（$b_1=0$）

$$b_{n+1}-2b_n=n$$

$$b_{n+1}=2b_n+n \quad \text{---②}.$$

このとき．$b_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{b_n-(\alpha n+\beta)\}$ とおると．

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha n+\alpha-\beta$$

②より $\begin{cases}-\alpha=1\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$ $\therefore\ \alpha=\beta=-1$

だから ②は．$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$ ---③

と変形できる。

よって．数列 $\{b_n+n+1\}$ は、初項 $b_1+1+1=2$，公比2の等比数列より

$$b_n+n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

したがって，$\underline{b_n=2^n-n-1}$ ---(答)

(2) $a_n \geqq 10^{100}$

両辺を底3の対数をとると．（底3>1 だから）

$$\log_3 a_n \geqq \log_3 10^{100}$$

$$b_n \geqq 100\log_{10}3 = 100\div 0.4771 \fallingdotseq 209.5$$

ここで，(2)の結果から．

$$b_7=2^7-7-1=120$$

$$b_8=2^8-8-1=247$$

よって．$b_7<209.5<b_8$ だから．

$\underline{求める最小のnは．\ n=8}$ ---(答)

鳥取・医[I]，地域[IV].

[I]
[IV]

(1)
$$\begin{array}{r} 7x+13y=1111 \\ -\big)\ 7\times 12+13\times 79=1111 \\ \hline 7(x-12)+13(y-79)=0 \end{array}$$

$$7(x-12)=13(79-y)$$

7と13は互いに素なので

$$\begin{cases} x-12=13k \iff x=13k+12 \\ 79-y=7k \iff y=79-7k \end{cases} \quad (k\text{は任意の整数}) \text{ —— ①}$$

x, y ともに自然数なので $13k+12>0$ かつ $79-7k>0$ より

k は $0\leqq k\leqq 11$ の自然数なので <u>12組</u> …(答)

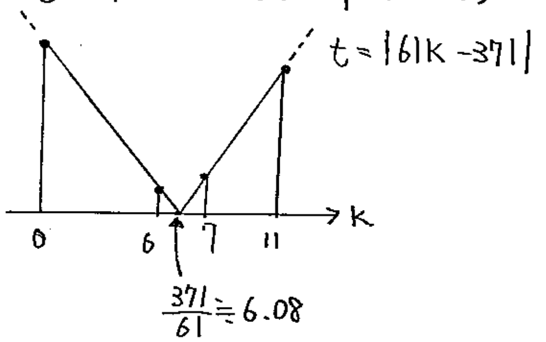
(2) $s=-x+2y=-(13k+12)+2(79-2k)=-27k+146$ （∵①より）

$0\leqq k\leqq 11$ より

$$\begin{cases} k=0 \text{ のとき最大で } 146 \\ k=11 \text{ のとき最小で } -151 \end{cases}$$

したがって，<u>sの最大値 146，最小値 -151</u> …(答)

(3) $t=|2x-5y|=|2(13k+12)-5(79-5k)|=|61k-371|$ （∵①より）



$t=|61k-371|$ を $0\leqq k\leqq 11$ でグラフを書くと左図のようになる。
最小値は $k=6, 7$ のいずれかでなり，
最大値は $k=0, 11$ のいずれかでなる.

$$\begin{cases} k=6 \text{ のとき } |-5|=5 \\ k=7 \text{ のとき } |56|=56 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=0 \text{ のとき } |-371|=371 \\ k=11 \text{ のとき } |300|=300 \end{cases}$$

したがって，<u>tの最大値 371，最小値 5</u> …(答)