数理　　医

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

（数理・情報システム学科）

（前期日程）

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄

1

(1) 1回目の操作を行ったあと起こりうる状態は

m=1のとき (a, c, b)

m=2のとき (c, b, a)

m=3のとき (b, a, c)

m=4のとき (c, a, b)

m=5のとき (b, c, a) …(答)

この5通りで (a, b, c) はないので $p_1 = 0$ …(答)

この1回の操作でおこる状態は (a, b, c)の順列6通りのうち (a, b, c)を除く5通りになっていれば

(a, c, b)のときは m=1、(c, b, a)のときは m=2、(b, a, c)のときは m=3、

(c, a, b)のときは m=5、(b, c, a)のときは m=4で それぞれ (a, b, c) となる。

よって $p_2 = \frac{5}{5^2} = \frac{1}{5}$ …(答)

(2) (証明) n回目の操作を行ったあとの状態が (a, b, c) となっていないのは

(1)であげた (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (c, a, b), (b, c, a) のときで

そのおのおのが ただ1つのmの値に対して (a, b, c) となる。

また、n回目の操作を行ったあとの状態が (a, b, c) であれば (1)で示したように

n+1回目の操作のあと (a, b, c) になることはない

よって $p_{n+1} = \frac{1}{5} q_n$ (証明終)

(3) (2)より $p_{n+1} = \frac{1}{5} q_n$ で $p_n + q_n = 1$ なので

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{-1}{5}\left(p_n - \frac{1}{6}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{6} = \left(p_1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} \text{ …(答)}$$

医学科

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $a=b=c=k$ (kは自然数)とおくと

$n(a+b+c)=abc$ より

$3kn=k^3$

$k\neq 0$ より　$3n=k^2$ ——①

n, kは自然数より

k^2は3の倍数であるからkも3の倍数となるので

$k=3m$ (mは自然数)と表せるので①より $n=3m^2$ となる。

つまり nが3の倍数であることが示せた　…(証明終)

(2) $n=3$ のとき

$3(a+b+c)=abc$ —(＊)

$a\leqq b\leqq c$ より　$a+b+c\leqq c+c+c=3c$

$3(a+b+c)\leqq 9c$

$abc\leqq 9c$

$c\neq 0$ より　$ab\leqq 9$　つまり $1\leqq ab\leqq 9$ が成り立つ.

また，$a\times a\leqq ab\leqq 9$ より $1\leqq a^2\leqq 9$ から $1\leqq a\leqq 3$

したがって，$a=1,2,3$ に限られる

(i) $a=1$ のとき，(＊)より

$3(1+b+c)=bc \iff (b-3)(c-3)=12$

$b\leqq c$ より　$-2\leqq b-3\leqq c-3$ なので

$\begin{pmatrix} b-c \\ c-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ から $(b,c)=(4,15),(5,9),(6,7)$

(ii) $a=2$ のとき，(＊)より

$3(2+b+c)=2bc \iff (2b-3)(2c-3)=21$

$b\leqq c$ より　$-1\leqq 2b-3\leqq 2c-3$ なので

$\begin{pmatrix} 2b-3 \\ 2c-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ から　$(b,c)=(2,12),(3,5)$

(iii) $a=3$ のとき，(＊)より

$3(3+b+c)=3bc \iff (b-1)(c-1)=4$

$b\leqq c$ より　$0\leqq b-1\leqq c-1$ なので

$\begin{pmatrix} b-1 \\ c-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ から　$(b,c)=(2,5),(3,3)$

今，$a\leqq b$ より $b=2$ は不適であるから，$(b,c)=(3,3)$ のみ

以上(i),(ii),(iii)より

$(a,b,c)=(1,4,15),(1,5,9),(1,6,7),(2,2,12),(2,3,5),(3,3,3)$ …(答)

数理　　医 3

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄　2

(1) $f'(x)=\dfrac{8}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x)=-\dfrac{8x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

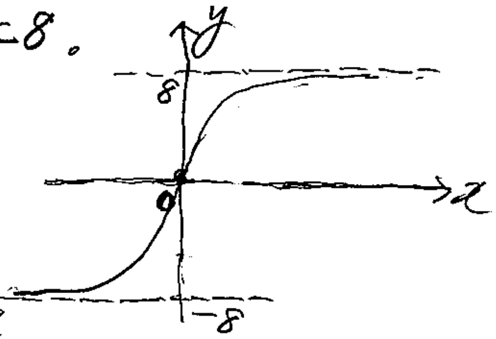
x	……	0	……
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗

左表から,
$x>0$ で上に凸
$x<0$ で下に凸
変曲点 $(0,0)$

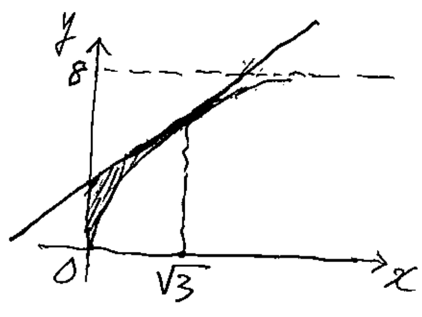
• 漸近線: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & (x>0)\\ \dfrac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & (x<0)\end{cases}$ より, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm 8$ (複号同順)

よって, 漸近線 $y=\pm 8$。

• $y=f(x)$ のグラフ:
($y=f(x)$ は奇関数)



(2) 共有点が2つになるのは, (1)のグラフから, $y=x+k$ が, $y=f(x)$ に接するときである。よって, $f'(x)=1$ より $8=(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 4=x^2+1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$
接点は $(\pm\sqrt{3}, \pm 4\sqrt{3})$ (複号同順)。よって, 接線は, $y=x\pm 3\sqrt{3}$
$k>0$ より, $k=3\sqrt{3}$ □



(3) $0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ で $f(x)\leqq x+3\sqrt{3}$ より

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x+3\sqrt{3}-\frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x+3\sqrt{3})^2-8\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}(48-27)-8(2-1)$$
$$=\frac{21}{2}-8$$
$$=\frac{5}{2}$$ □

数理　医

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4 (1)(証明) $x=\frac{1}{2}$ のとき $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ …①

[I] ①より $Q_1(x)=0$

[II] kを自然数として、$Q_k(x)=0$と仮定する。

このとき、$X^{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_k(x) & 0\\ R_k(x) & S_k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}P_k(x) & 0\\ \frac{1}{2}P_k(x)+R_k(x) & S_k(x)\end{pmatrix}$

よって $Q_{k+1}(x)=0$

[I],[II]よりすべての自然数nに対して、$x=\frac{1}{2}$のとき$Q_n(x)=0$…(証明終)

(証明) $x=\frac{2}{3}$ のとき $X=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ …②

[I] ②より $R_1(x)=0$

[II] kを自然数として、$R_k(x)=0$と仮定する

このとき、$X^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_k(x) & Q_k(x)\\ 0 & S_k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_k(x) & Q_k(x)+\frac{1}{3}S_k(x)\\ 0 & \frac{2}{3}S_k(x)\end{pmatrix}$

よって $R_{k+1}(x)=0$

[I][II]よりすべての自然数nに対して、$x=\frac{2}{3}$のとき$R_n(x)=0$…(証明終)

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より $X^2-(x+1)X+xE=O$

$\therefore X^2+aX+bE=O \Longleftrightarrow (x+1+a)X=(x-b)E$ …③

$x+1+a\neq 0$とすれば $X=\dfrac{x-b}{x+1+a}E$ となるが $X=\begin{pmatrix}3x-1 & 2x-1\\ -3x+2 & -2x+2\end{pmatrix}$ なので

これらをみたす実数xは存在しない

$x+1+a=0$とすれば $x-b=0$としたときに③をみたす実数xが存在する。

よって求める条件は $\underline{\underline{a+b+1=0}}$ …(答)

(3)(証明) $X^3=XX^2=X\{(x+1)X-xE\}=(x+1)\{(x+1)X-xE\}-xE$
$=(x^2+x+1)X-x(x+1)E$

$\therefore X^3=O \Longleftrightarrow (x^2+x+1)X=x(x+1)E$

ここで、$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$ より

$X=\dfrac{x(x+1)}{x^2+x+1}E$ となるが、$X=\begin{pmatrix}3x-1 & 2x-1\\ -3x+2 & -2x+2\end{pmatrix}$ なので

これらをみたす実数xは存在しない。

つまり、$X^3=O$をみたす実数xは存在しない …(証明終)