数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

（数理・情報システム学科）

（前期日程）

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄 1

(1) 1回目の操作を行ったあと起こりうる状態は

$m=1$ のとき (a, c, b)

$m=2$ のとき (c, b, a)

$m=3$ のとき (b, a, c)

$m=4$ のとき (c, a, b)

$m=5$ のとき (b, c, a) …(答)

この5通りで (a, b, c) はないので $p_1=0$ …(答)

この1回の操作でおこる状態は (a, b, c) の順列6通りのうち (a, b, c) を除く5通りになっていて、

(a, c, b) のときは $m=1$、(c, b, a) のときは $m=2$、(b, a, c) のときは $m=3$、

(c, a, b) のときは $m=5$、(b, c, a) のときは $m=4$ でそれぞれ (a, b, c) となる。

よって $p_2=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$ …(答)

(2) (証明) n 回目の操作を行ったあとの状態が (a, b, c) となっていないのは

(1)であげた (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (c, a, b), (b, c, a) のときで

そのおのおのが ただ1つの m の値に対して (a, b, c) となる。

また、n 回目の操作を行ったあとの状態が (a, b, c) であれば (1)で示したように

$n+1$ 回目の操作のあと (a, b, c) になることはない

よって $p_{n+1}=\frac{1}{5}q_n$ (証明終)

(3) (2)より $p_{n+1}=\frac{1}{5}q_n$ で $p_n+q_n=1$ なので

$p_{n+1}=\frac{1}{5}(1-p_n)$

$p_{n+1}-\frac{1}{6}=\frac{-1}{5}\left(p_n-\frac{1}{6}\right)$

$p_n-\frac{1}{6}=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore p_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$ …(答)

数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

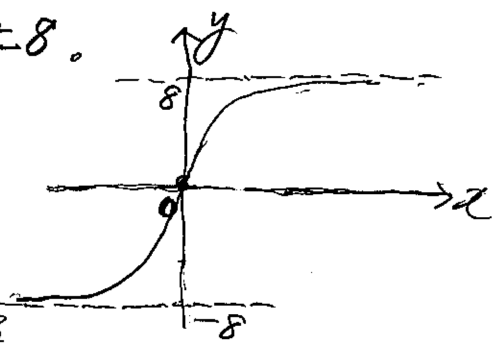
(1) $f'(x)=\dfrac{8}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x)=-\dfrac{8x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

左表から,
$x>0$ で上に凸
$x<0$ で下に凸
変曲点 $(0,0)$

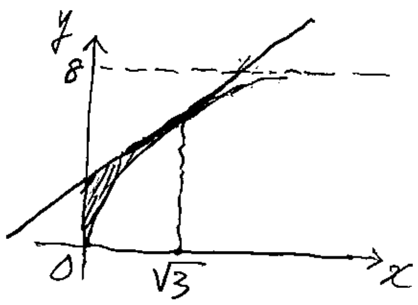
• 漸近線: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & (x>0)\\ \dfrac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & (x<0)\end{cases}$ より, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm 8$ (複号同順)

よって, 漸近線 $y=\pm 8$。



• $y=f(x)$ のグラフ:
($y=f(x)$ は奇関数)

(2) 共有点が2つになるのは, (1)のグラフから, $y=x+k$ が, $y=f(x)$ に接するときである。よって, $f'(x)=1$ より $8=(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 4=x^2+1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$
接点は $(\pm\sqrt{3}, \pm 4\sqrt{3})$ (複号同順)。よって, 接線は, $y=x\pm 3\sqrt{3}$
$k>0$ より, $k=3\sqrt{3}$ ◻



(3) $0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ で $f(x)\leqq x+3\sqrt{3}$ より

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x+3\sqrt{3}-\frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x+3\sqrt{3})^2-8\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(48-27)-8(2-1)$$

$$=\frac{21}{2}-8$$

$$=\frac{5}{2}$$ ◻

数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $f(x)=x^2-3$ より $f'(x)=2x$

$(2,1)$ における接線は

$y-1=4(x-2)$ $\therefore y=4x-7$

$y=0$ とすると $x=\frac{7}{4}$ $\therefore a_2=\frac{7}{4}$ …(答)

(2) (a_n, a_n^2-3) における接線は

$y-(a_n^2-3)=2a_n(x-a_n)$ $\therefore y=2a_nx-a_n^2-3$

$y=0$ とすると $2a_nx=a_n^2+3$

$x=\frac{a_n^2+3}{2a_n}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{2a_n}$ …(答)

(3)(証明)

[I] $n=1$ のとき $a_1=2>\sqrt{3}$ より 成り立つ

[II] $n=k$ のとき $a_k\geqq\sqrt{3}$ が成り立つと仮定

$n=k+1$ のとき (2)から $a_{k+1}-\sqrt{3}=\frac{a_k^2+3}{2a_k}-\sqrt{3}$

$=\frac{(a_k-\sqrt{3})^2}{2a_k}\geqq 0$ $\therefore a_{k+1}\geqq\sqrt{3}$ より $n=k+1$ のときも成り立つ

[I][II] より すべての自然数 n について $a_n\geqq\sqrt{3}$ が成り立つ (証明終)

(4) (証明)

$a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{(a_n-\sqrt{3})^2}{2a_n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{a_n}\right)(a_n-\sqrt{3})$

(3)より $1-\frac{\sqrt{3}}{a_n}\leqq 1$ であるから

$a_{n+1}-\sqrt{3}\leqq\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

$\therefore a_n-\sqrt{3}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-1}-\sqrt{3})\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{3})$

$\therefore 0\leqq a_n-\sqrt{3}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$ (証明終)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})=0$ から $\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{3})=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ …(答)

数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4 (1)(証明) $x=\frac{1}{2}$ のとき $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdots$①

[I] ①より $Q_1(x)=0$

[II] k を自然数として、$Q_k(x)=0$ と仮定する.

このとき、$X^{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_k(x) & 0\\ R_k(x) & S_k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}P_k(x) & 0\\ \frac{1}{2}P_k(x)+R_k(x) & S_k(x)\end{pmatrix}$

よって $Q_{k+1}(x)=0$

[I],[II] よりすべての自然数 n に対して、$x=\frac{1}{2}$ のとき $Q_n(x)=0\cdots$(証明終)

(証明) $x=\frac{2}{3}$ のとき $X=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdots$②

[I] ②より $R_1(x)=0$

[II] k を自然数として、$R_k(x)=0$ と仮定する

このとき、$X^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_k(x) & Q_k(x)\\ 0 & S_k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_k(x) & Q_k(x)+\frac{1}{3}S_k(x)\\ 0 & \frac{2}{3}S_k(x)\end{pmatrix}$

よって $R_{k+1}(x)=0$

[I][II] よりすべての自然数 n に対して、$x=\frac{2}{3}$ のとき $R_n(x)=0\cdots$(証明終)

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より $X^2-(x+1)X+xE=O$

$\therefore X^2+aX+bE=O \Leftrightarrow (x+1+a)X=(x-b)E\cdots$③

$x+1+a\neq 0$ とすれば $X=\frac{x-b}{x+1+a}E$ となるが $X=\begin{pmatrix}3x-1 & 2x-1\\ -3x+2 & -2x+2\end{pmatrix}$ なので

これらをみたす実数 x は存在しない

$x+1+a=0$ とすれば $x-b=0$ としたときに③をみたす実数 x が存在する.

よって求める条件は $\underline{a+b+1=0}\cdots$(答)

(3)(証明) $X^3=XX^2=X\{(x+1)X-xE\}=(x+1)\{(x+1)X-xE\}-xE$
$=(x^2+x+1)X-x(x+1)E$

$\therefore X^3=O \Leftrightarrow (x^2+x+1)X=x(x+1)E$

ここで、$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\neq 0$ より

$X=\frac{x(x+1)}{x^2+x+1}E$ となるが、$X=\begin{pmatrix}3x-1 & 2x-1\\ -3x+2 & -2x+2\end{pmatrix}$ なので

これらをみたす実数 x は存在しない.

つまり、$X^3=O$ をみたす実数 x は存在しない…(証明終)