医[I]　地域[I]

(1) $f(x)=\sin^2 2x-a(4\cos^2 x-\cos 2x-2)+b$

$=1-\cos^2 2x-a\left(4\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\cos 2x-2\right)+b$

$=-\cos^2 2x-a\cos 2x+b+1$

$=\underline{\underline{-t^2-at+b+1}}$ …(答)

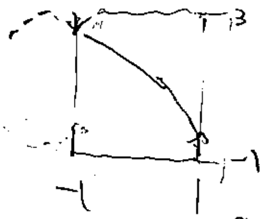
(2) $g(t)=-t^2-at+b+1$ とおく

$t=\cos 2x$ からすべての実数 x について $-1\leqq t\leqq 1$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で $g(t)$ の最大値 3 以下かつ最小値 -1 以上となればよい。

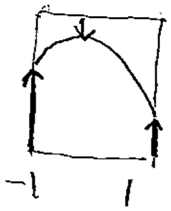
$g(t)=-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b+1$, $g(-1)=a+b$, $g(1)=-a+b$ から

(i) $-\frac{a}{2}<-1$ ∴ $a>2$ のとき



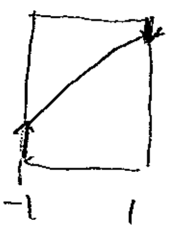
$\begin{cases} g(-1)\leqq 3 \\ g(1)\geqq -1 \end{cases} \iff a-1\leqq b\leqq -a+3$

(ii) $-1\leqq -\frac{a}{2}\leqq 1$ ∴ $-2\leqq a\leqq 2$



$\begin{cases} g(-1)\geqq -1 \\ g(1)\geqq -1 \\ g\left(-\frac{a}{2}\right)\leqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b\geqq a-1 \\ b\geqq -a+1 \\ b\leqq -\frac{a^2}{4}+2 \end{cases}$

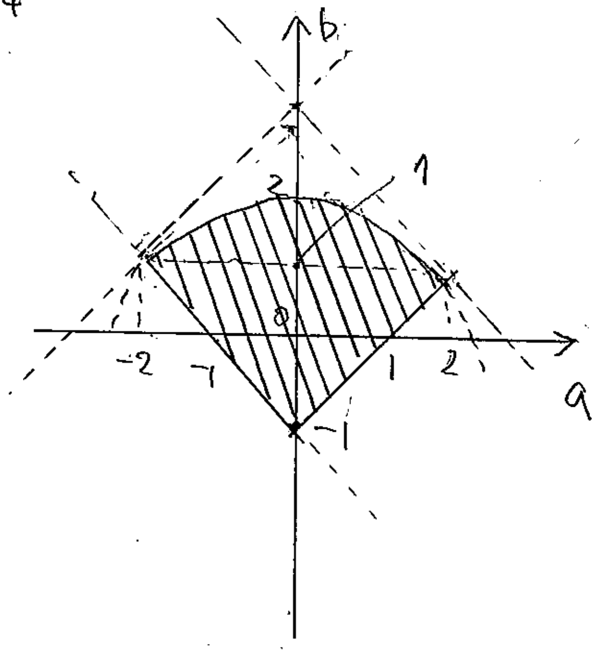
(iii) $-\frac{a}{2}>1$ ∴ $a<-2$ のとき



$\begin{cases} g(-1)\geqq -1 \\ g(1)\leqq 3 \end{cases}$

$\iff -a-1\leqq b\leqq a+3$

(i)(ii)(iii) より 右図斜線部で 境界を含む。



〔II〕

(1) $P_0(p_x, p_y)$, $Q_0(q_x, q_y)$ の距離 D_0 は

$$\underline{\underline{D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}}} \quad \cdots (答)$$

(2) $sR = A$ より

$$\begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

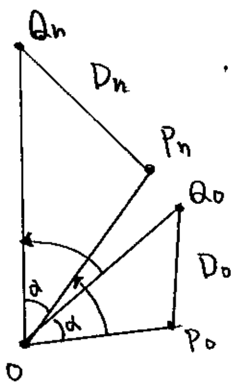
各成分を比較して. $a = s\cos\theta$, $b = s\sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $(s\sin\theta)^2 + (s\cos\theta)^2 = s^2$

$$a^2 + b^2 = s^2$$

$s > 0$ より $\underline{\underline{s = \sqrt{a^2 + b^2}}}$ $\cdots$ (答)

(3)



$\overrightarrow{OP_0}$ を $n\theta$ 回転し, s倍拡大したものが $\overrightarrow{OP_n}$

$\overrightarrow{OQ_0}$ を $n\theta$ 回転し, s倍拡大したものが $\overrightarrow{OQ_n}$ なので

$\triangle OP_0Q_0 \backsim \triangle OP_nQ_n$ なので

$$\frac{D_n}{D_0} = \frac{OP_n}{OP_0}$$

$OP_n = (\sqrt{a^2+b^2})^n OP_0$ より $\dfrac{OP_n}{OP_0} = (\sqrt{a^2+b^2})^n$

したがって

$$\underline{\underline{\frac{D_n}{D_0} = (\sqrt{a^2+b^2})^n}} \quad \cdots (答)$$

〔Ⅲ〕 医学部生命科学，工学部，農学部

(1) $1-x=t$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$\dfrac{dt}{dx}=-1$

$$B(p,q)=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

$B(p,q)=B(q,p)$ が成り立つ ...(証明終)

(2) $$B(p,q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\int_0^1\left(\frac{x^p}{p}\right)'(1-x)^q dx$$

$$=\left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1-\frac{1}{p}\int_0^1 x^p\times q(1-x)^{q-1}\times(-1)dx$$

$$=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$$

$B(p,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,q)$ —— ① が成り立つ ...(証明終)

同様にして $B(p+1,q)=\dfrac{p}{q}B(p,q+1)$ —— ② も成り立つ

また， $$B(p+1,q)+B(p,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\{x+(1-x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$B(p+1,q)+B(p,q+1)=B(p,q)$ が成り立つ ...(証明終)

(3) (2)の $B(p+1,q)+B(p,q+1)=B(p,q)$ に①を代入して

$$\frac{p}{q}B(p,q+1)+B(p,q+1)=B(p,q)$$

$$\frac{p+q}{q}B(p,q+1)=B(p,q)$$

$B(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}B(p,q)$ が成り立つ ...(証明終)

これを②に代入すると $B(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,q)$ が成り立つ ...(証明終)

(4) (3)の関係式をくり返し用いると

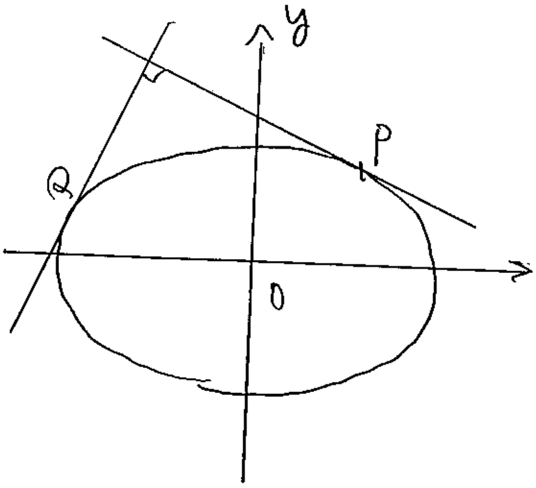
$B(5,4)=\dfrac{3}{8}B(5,3)$ ， $B(5,3)=\dfrac{2}{7}B(5,2)$ ， $B(5,1)=\dfrac{1}{6}B(5,1)$ より

$B(5,4)=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}B(5,1)$

ここで $B(5,1)=\displaystyle\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$ なので

$B(5,4)=\dfrac{1}{8\times7}\times\dfrac{1}{5}=\underline{\dfrac{1}{280}}$ ...(答)

医 [IV]



(1) $P(a\cos t,\ b\sin t)$ における接線は

$$\frac{a\cos t}{a^2}\cdot x + \frac{b\sin t}{b^2}\cdot y = 1 \quad \text{より}$$

$$l:\ \frac{\cos t}{a}x + \frac{\sin t}{b}y = 1 \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 同様に $Q(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ における接線は

$$m:\ \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1$$

$l \perp m$ より

$$\frac{\cos t}{a}\cdot\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin t}{b}\cdot\frac{\sin\theta}{b} = 0$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \neq 0$ で $\cos\theta = -\frac{a^2\sin t}{b^2\cos t}\cdot\sin\theta \quad \cdots①$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から $\left\{1 + \left(-\frac{a^2\sin t}{b^2\cos t}\right)^2\right\}\sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = \frac{b^4\cos^2 t}{a^4\sin^2 t + b^4\cos^2 t}$ 　$\sin\theta > 0,\ \cos t > 0,\ \sin t > 0$ より

$\sin\theta = \frac{b^2\cos t}{\sqrt{a^4\sin^2 t + b^4\cos^2 t}}$ 　①から $\cos\theta = \frac{-a^2\sin t}{\sqrt{a^4\sin^2 t + b^4\cos t}}$

よって $Q\left(-\frac{a^3\sin t}{\sqrt{a^4\sin^2 t + b^4\cos^2 t}},\ \frac{b^3\cos t}{\sqrt{a^4\sin^2 t + b^4\cos^2 t}}\right) \cdots(\text{答})$

$m:\ -(a\sin t)x + (b\cos t)y = \sqrt{a^4\sin^2 t + b^4\cos^2 t} \quad \cdots(\text{答})$

(3) $a\sin t = A$, $b\cos t = B$ とおくと

$l:\ Bx + Ay = ab$

$m:\ -Ax + By = \sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}$

l と m の交点を $R(x, y)$ とすると

$\begin{pmatrix} B & A \\ -A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ \sqrt{a^2A^2 + b^2B^2} \end{pmatrix}$ より $B^2 + A^2 \neq 0$ から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2}\begin{pmatrix} B & -A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab \\ \sqrt{a^2A^2 + b^2B^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2}\begin{pmatrix} abB - A\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2} \\ abA + B\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2} \end{pmatrix}$$

解答

$$OP^2 = x^2+y^2 = \frac{1}{(A^2+B^2)^2}\left\{\left(abB - A\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}\right)^2 + \left(abA + B\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(A^2+B^2)^2}\left\{(B^2+A^2)a^2b^2 + (A^2+B^2)(a^2A^2+b^2B^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{A^2+B^2}\left(a^2b^2 + a^2A^2 + b^2B^2\right)$$

ここで $b^2A^2+a^2B^2 = a^2b^2(\sin^2 t+\cos^2 t) = a^2b^2$ であるから

$$OP^2 = \frac{1}{A^2+B^2}\left(b^2A^2+a^2B^2+a^2A^2+b^2B^2\right)$$

$$= \frac{1}{A^2+B^2}(A^2+B^2)(a^2+b^2) = a^2+b^2$$

$OP>0$ より $OP = \sqrt{a^2+b^2}$ …(答)