[I]

(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおくと，$2^x>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係より

$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$ から $t\geqq 2$ —— ①

(等号は $2^x=2^{-x}$ のとき)

$2^x+2^{-x}=t$ の両辺を2乗して，$4^x+4^{-x}+2=t^2$

$4^x+4^{-x}=t^2-2$

題意の式より $2(t^2-2)-9t+14=0$

$\underline{\underline{2t^2-9t+10=0}}$ …(答)

(2) (1)より $(2t-5)(t-2)=0$

$t=2,\ \frac{5}{2}$

これらは①の不等式を満たすので，$\underline{\underline{t=2,\ \frac{5}{2}}}$ …(答)

(3) (i) $t=2$ のとき，

①の不等式の等号成立条件なので

$2^x=2^{-x}$ より $2^x=1$ から $x=0$

(ii) $t=\frac{5}{2}$ のとき，

$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$

$2(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$

$(2\cdot 2^x-1)(2^x-2)=0$

$2^x=\frac{1}{2},\ 2$

$x=-1,\ 1$

以上より $\underline{\underline{x=-1,\ 0,\ 1}}$ …(答)

〔II〕

(1) $P_0(p_x, p_y)$, $Q_0(q_x, q_y)$ の距離 D_0 は

$$D_0 = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2} \quad \cdots (答)$$

(2) $sR = A$ より

$$\begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

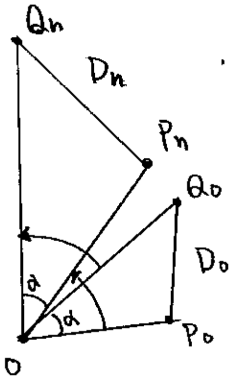
各成分を比較して. $a = s\cos\theta$, $b = s\sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $(s\sin\theta)^2 + (s\cos\theta)^2 = s^2$

$$a^2 + b^2 = s^2$$

$s > 0$ より $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cdots$ (答)

(3)



$\overrightarrow{OP_0}$ を $n\theta$ 回転し, s倍拡大したものが $\overrightarrow{OP_n}$

$\overrightarrow{OQ_0}$ を $n\theta$ 回転し, s倍拡大したものが $\overrightarrow{OQ_n}$ なので

$\triangle OP_0Q_0 \backsim \triangle OP_nQ_n$ なので

$$\frac{D_n}{D_0} = \frac{OP_n}{OP_0}$$

$OP_n = (\sqrt{a^2+b^2})^n OP_0$ より $\dfrac{OP_n}{OP_0} = (\sqrt{a^2+b^2})^n$

したがって

$$\frac{D_n}{D_0} = (\sqrt{a^2+b^2})^n \quad \cdots (答)$$

〔III〕 医学部生命科学，工学部，農学部

(1) $1-x=t$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$\dfrac{dt}{dx}=-1$

$$B(p,q)=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

$B(p,q)=B(q,p)$ が成り立つ．…(証明終)

(2)
$$B(p,q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\int_0^1\left(\frac{x^p}{p}\right)'(1-x)^q dx$$
$$=\left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1-\frac{1}{p}\int_0^1 x^p\times q(1-x)^{q-1}\times(-1)dx$$
$$=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$$

$B(p,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,q)$ —— ① が成り立つ．…(証明終)

同様にして $B(p+1,q)=\dfrac{p}{q}B(p,q+1)$ —— ② も成り立つ．

また，
$$B(p+1,q)+B(p,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\{x+(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$B(p+1,q)+B(p,q+1)=B(p,q)$ が成り立つ．…(証明終)

(3) (2)の $B(p+1,q)+B(p,q+1)=B(p,q)$ に①を代入して

$$\frac{p}{q}B(p,q+1)+B(p,q+1)=B(p,q)$$
$$\frac{p+q}{q}B(p,q+1)=B(p,q)$$
$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$$ が成り立つ …(証明終)

これを②に代入すると $B(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,q)$ が成り立つ …(証明終)

(4) (3)の関係式をくり返し用いると，

$B(5,4)=\dfrac{3}{8}B(5,3)$，$B(5,3)=\dfrac{2}{7}B(5,2)$，$B(5,1)=\dfrac{1}{6}B(5,1)$ より

$$B(5,4)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}B(5,1)$$

ここで $B(5,1)=\displaystyle\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$ なので

$$B(5,4)=\frac{1}{8\times7}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{280}$$ …(答)

〔IV〕 医学部生命科学，工学部，農学部

(1) $\theta = 0$ のとき，$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

積 xy が最大となるのは，$x^2 + y^2 = 3^2$ の第1象限の周上でしか起こらないので

$x = 3\cos\alpha$，$y = 3\sin\alpha$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。

$xy = 9\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{9}{2}\sin 2\alpha$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$

このとき，$\sin 2\alpha$ は $2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大，つまり $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大なので

P_0 の座標は $\underline{\underline{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)}}$ …(答)

(2) $x = (\cos\theta + 2)\cos\alpha$，$y = (\sin\theta + 2)\sin\alpha$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。

(1)と同様に

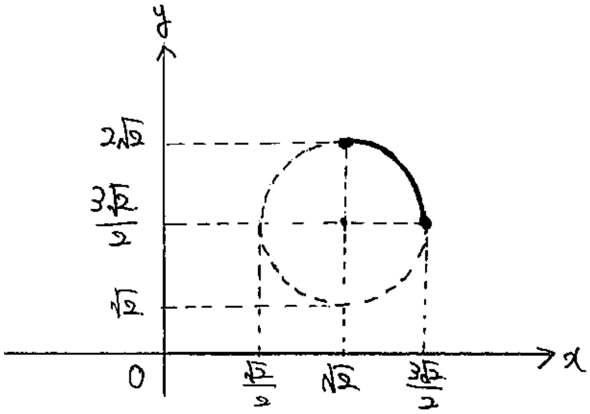
$xy = (\cos\theta+2)(\sin\theta+2)\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{(\cos\theta+2)(\sin\theta+2)}{2}\sin 2\alpha \underset{\left(\alpha=\frac{\pi}{4}\right)}{\leqq} \dfrac{(\cos\theta+2)(\sin\theta+2)}{2}$

このとき，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + 2)$，$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + 3)$ なので

$\cos\theta = \sqrt{2}x - 2$，$\sin\theta = \sqrt{2}y - 3$ を $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入して

$(\sqrt{2}x - 2)^2 + (\sqrt{2}y - 3)^2 = 1$

$(x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ から

$\sqrt{2} \leqq x \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}$

したがって，求める軌跡の方程式は

$\underline{\underline{(x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}，\text{ただし，}\sqrt{2} \leqq x \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}，\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}\text{ の部分}}}$ …(答)