工・農・生命 [I]　地域 [I]

(1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと，$2^x > 0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係より

$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$ から $t \geqq 2$ —— ①

(等号は $2^x = 2^{-x}$ のとき)

$2^x + 2^{-x} = t$ の両辺を2乗して，$4^x + 4^{-x} + 2 = t^2$

$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$

題意の式より $2(t^2 - 2) - 9t + 14 = 0$

$\underline{\underline{2t^2 - 9t + 10 = 0}}$ …(答)

(2) (1)より $(2t - 5)(t - 2) = 0$

$t = 2, \frac{5}{2}$

これらは ① の不等式を満たすので，$\underline{\underline{t = 2, \frac{5}{2}}}$ …(答)

(3) (i) $t = 2$ のとき，

① の不等式 の等号成立条件なので

$2^x = 2^{-x}$ より $2^x = 1$ から $x = 0$

(ii) $t = \frac{5}{2}$ のとき，

$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$

$2(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

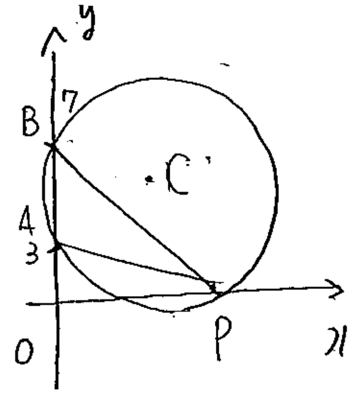
$(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$

$2^x = \frac{1}{2}, 2$

$x = -1, 1$

以上より $\underline{\underline{x = -1, 0, 1}}$ …(答)

地域 [Ⅱ]



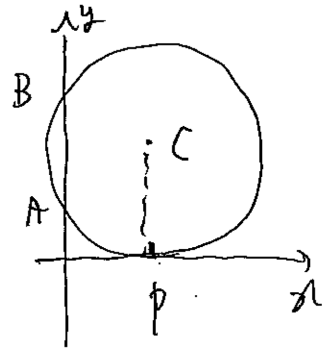
(1) 線分ABの垂直二等分線は $y=5$ …①

求める円の中心は①上にあるので $C(c, 5)$ とおける

$AC=PC$ より $AC^2=PC^2$

$(c-0)^2+(5-3)^2=(c-t)^2+(5-0)^2$

これから $t\neq 0$ より $c=\dfrac{t^2+21}{2t}$ $\therefore C\left(\dfrac{t^2+21}{2t}, 5\right)$ …(答)



(2) (1)の円がx軸に接するときすなわち $c=t$ のときである。

$\dfrac{t^2+21}{2t}=t$, $t>0$ から $t=\sqrt{21}$

このとき半径は5

$\therefore$ $(x-\sqrt{21})^2+(y-5)^2=25$ …(答)

(3) $\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle ACB$ から $\angle APB$ が最大のとき $\angle ACB$ 最大

A, Bは定点であるから、Cのx座標が最小のときである。

$c=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{21}{t}\right)$ $t>0$, $\dfrac{21}{t}>0$ から (相加平均)相乗平均の大小関係より

$c\geqq\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t\cdot\dfrac{21}{t}}=\sqrt{21}$

等号成立は $t=\dfrac{21}{t}$ $t>0$ より $t=\sqrt{21}$ のとき

$\therefore$ $P(\sqrt{21}, 0)$ …(答)

医[I]　地域[III]

(1) $f(x) = \sin^2 2x - a(4\cos^2 x - \cos 2x - 2) + b$

$= 1 - \cos^2 2x - a\left(4 \times \dfrac{1+\cos 2x}{2} - \cos 2x - 2\right) + b$

$= -\cos^2 2x - a\cos 2x + b + 1$

$= \underline{\underline{-t^2 - at + b + 1}}$ …(答)

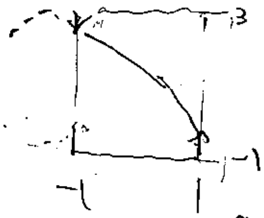
(2) $g(t) = -t^2 - at + b + 1$ とおく

$t = \cos 2x$ から すべての実数 x について $-1 \leqq t \leqq 1$

$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $g(t)$ の最大値 3 以下 かつ 最小値 -1 以上となればよい。

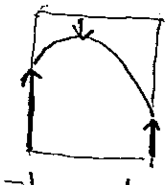
$g(t) = -\left(t + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} + b + 1$, $g(-1) = a + b$, $g(1) = -a + b$ から

(i) $-\dfrac{a}{2} < -1$ $\therefore a > 2$ のとき



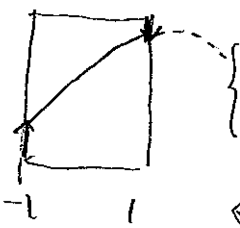
$\begin{cases} g(-1) \leqq 3 \\ g(1) \geqq -1 \end{cases} \iff a - 1 \leqq b \leqq -a + 3$

(ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$ $\therefore -2 \leqq a \leqq 2$



$\begin{cases} g(-1) \geqq -1 \\ g(1) \geqq -1 \\ g\left(-\dfrac{a}{2}\right) \leqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b \geqq a - 1 \\ b \geqq -a + 1 \\ b \leqq -\dfrac{a^2}{4} + 2 \end{cases}$

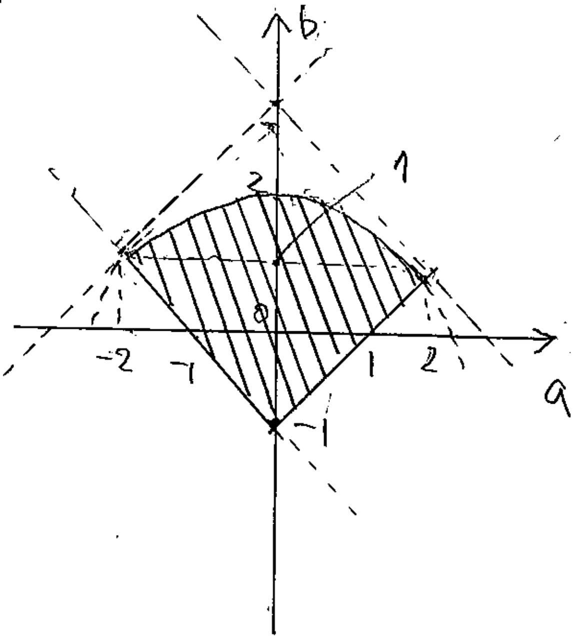
(iii) $-\dfrac{a}{2} > 1$ $\therefore a < -2$ のとき



$\begin{cases} g(-1) \geqq -1 \\ g(1) \leqq 3 \end{cases}$

$\iff -a - 1 \leqq b \leqq a + 3$

(i)(ii)(iii)より 右図斜線部で境界を含む。



地域 [Ⅳ]

(1) $n=2$ のとき $i_1<i_2$ かつ $i_3<i_4$ かつ $i_1<i_3$ から $i_1=1$

∴ [1, 2, 3, 4], [1, 3, 2, 4], [1, 4, 2, 3] の3通り

∴ $f(2)=3$ …(答)

$n=3$ のとき $i_1<i_2$ かつ $i_3<i_4$ かつ $i_5<i_6$ かつ $i_1<i_3<i_5$ より $i_1=1$

$i_2=2$ のとき i_3, i_4, i_5, i_6 の選び方は $f(2)=3$ 通り

$i_2=3, 4, 5, 6$ も同様　$3\times5=15$ 通り

∴ $f(3)=15$ …(答)

(2) (1)と同様に $i_1=1$ であり

i_2 の選び方は $2, 3, \cdots, 2n$ の $2n-1$ 通り

そのそれぞれについて、残り $i_3, i_4, \cdots, i_{2n}$ の $2(n-1)$ コの順列は

$f(n-1)$ 通りである。

∴ $f(n)=(2n-1)f(n-1)$ $(n\geqq2)$ …(答)

(3) (2)より、$n\geqq2$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(n)&=(2n-1)(2n-3)\cdot f(n-2)\\
&=\cdots\\
&=(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots5\cdot f(2)\\
&=(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots5\cdot3\cdot1\\
&=\frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}
\end{aligned}
$$
…(答)