医

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

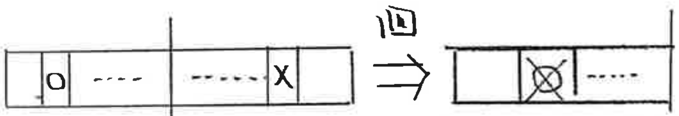
(医学部医学科)

コード		得点	1		3		4		5	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄

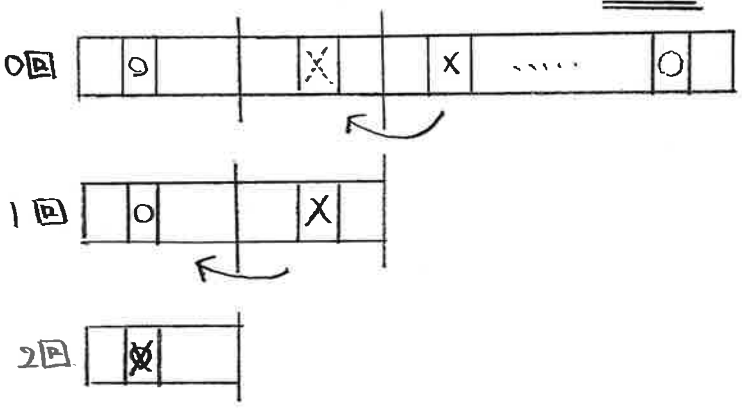
1

(1)



各x_1について, x_2の選び方は1通りのみ

$$P(n,1)=\frac{2^n}{2^n}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\quad\cdots(答)$$



2回目に左からy_n番目で○と×が一致したとすると

$1\leqq y_n\leqq 2^{n-2}$, y_nの選び方2^{n-2}通りで, 1回目の○×の選び方は2通り

そのそれぞれについて0回目で○の選び方2通り, ×の選び方2通りなので

$$P(n,2)=\frac{2^n}{2^n}\times\frac{2}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\quad\cdots(答)$$

(2) シートK_nでk点を得る確率はシートK_{n-1}で$k-1$点を得る確率に等しいので

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)\quad\cdots(答)$$

(3) $2\leqq k\leqq n$のとき

$P(n,k)=P(n-1,k-1)=\cdots=P(n-k+1,1)$が成り立ち

(1)より

$$P(n,k)=\frac{1}{2^{n-k+1}}$$

また, この式で$k=1$とすると$P(n,1)=\frac{1}{2^n}$となり成り立つ

したがって, $1\leqq k\leqq n$において

$$P(n,k)=\frac{1}{2^{n-k+1}}\quad\cdots(答)$$

数理・医

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=4$, $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角が$\frac{2}{3}\pi$だから $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$となり

$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=49$

$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|\geqq 0$ より　$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=\underline{\underline{7}}$ …(答)

(2) $\sin 4\alpha = \sin(3\alpha+\alpha)=\sin 3\alpha\cos\alpha+\cos 3\alpha\sin\alpha$

$\sin 4\alpha = (3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\cos\alpha+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\sin\alpha$ —(#)

$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

このとき(#)より $\sin 4\alpha=4\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{7\sqrt{15}}{32}$

したがって, $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times3\times4\sin 4\alpha=\underline{\underline{\frac{21\sqrt{15}}{16}}}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{OA}=3(\cos\beta, \sin\beta)$, $\overrightarrow{OB}=4(\cos\gamma, \sin\gamma)$ とおく　(ただし, $0<\beta,\gamma<2\pi$ とする)

$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-12\overrightarrow{OE}=(12\cos\beta+12\cos\gamma-12,\ 12\sin\beta+12\sin\gamma)=\vec{0}$ より

$\begin{cases}\cos\beta+\cos\gamma-1=0\\ \sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\gamma=1-\cos\beta\\ \sin\gamma=-\sin\beta\end{cases}$

$\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$ より

$(1-\cos\beta)^2+(-\sin\beta)^2=1$

$2-2\cos\beta=1$

$\cos\beta=\frac{1}{2}$, このとき $\cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\beta<\gamma$ とすると $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{5}{3}\pi$

$\beta>\gamma$ とすると $\beta=\frac{5}{3}\pi$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$

(このとき, $\sin\gamma=-\sin\beta$ をみたす)

$\beta=\gamma$ とするとき $\sin\beta=-\sin\alpha$ に不適

以上より

$\underline{\underline{\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=(2, \mp2\sqrt{3})\ (複号同順)}}$ …(答)

数理・医

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

(1) $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ なので増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$\frac{-1}{e^2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{-2}{e^2}$	↘	$\frac{-1}{e}$	↗

変曲点は $\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$

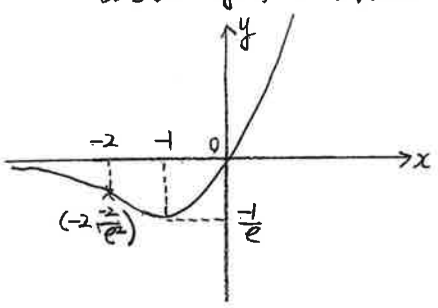
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x$

$x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ なので

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} (-te^{-t}) = 0$

したがって $y=f(x)$ のグラフの概形は図のようになる



… (答)

(2) (1) のグラフから求める2つの部分の面積の和 S は

$S = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$

ここで $\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$ (Cは積分定数) なので

$S = -\left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[xe^x - e^x\right]_0^1$

$= -\left(-1 + \frac{2}{e}\right) + 1 = \underline{\underline{2 - \frac{2}{e}}}$ … (答)

(3) (1) のグラフから $t \leqq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{-1}{e} \leqq f(t) \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$2<e<3$ だから $\frac{-1}{2} < \frac{-1}{e} < \frac{-1}{3}$

また、$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$ で $2<e<3$ なので $\frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{1}{2}\sqrt{e} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

よって $-1 < f(t) < 1$ である

$-1 < f(t) < 1$ で特に $f(t) \neq 1$ なので与えられた漸化式は

$a_{n+1} - \frac{1}{1-f(t)} = f(t)\left(a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right)$ と変形できる

よって $a_n = \left(a_1 - \frac{1}{1-f(t)}\right)\{f(t)\}^{n-1} + \frac{1}{1-f(t)}$ である

$-1 < f(t) < 1$ であるから $\{a_n\}$ は収束する　(証明終)

数理・医

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄　5

(1) $A(2,0)$, $H(1,y)$ とすると

題意より　$PA=\sqrt{2}PH$　となればよい

$PH^2=2PH^2$　から

$(x-2)^2+y^2=2|x-1|^2$

整理して　$C: \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ …(答)

(2) $x+y=t$ から $y=t-x$　これを C の式に代入して

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{(t-x)^2}{2}=1$

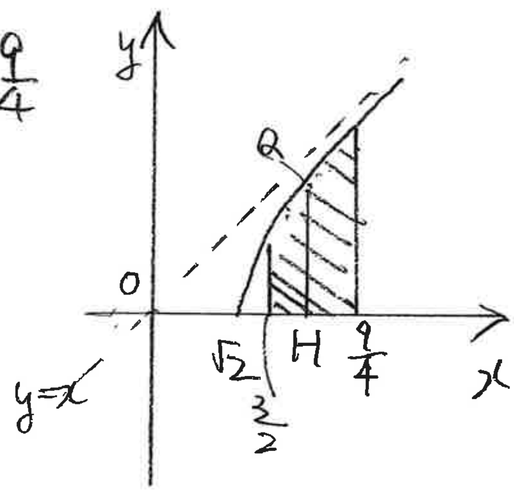
これから $t\neq 0$ より　$x=\dfrac{t^2+2}{2t}$

$y=t-\dfrac{t^2+2}{2t}=\dfrac{t^2-2}{2t}$　$\therefore Q\left(\dfrac{t^2+2}{2t}, \dfrac{t^2-2}{2t}\right)$ …(答)

(3) (2)より $t=2$ のとき $x=\dfrac{3}{2}$, $t=4$ のとき $x=\dfrac{9}{4}$

求める面積を S とすると

$S=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} y\,dx$



ここで　$x=\dfrac{t^2+2}{2t}$ から $dx=\dfrac{t^2-2}{2t^2}dt$

x	$\frac{3}{2} \to \frac{9}{4}$
t	$2 \to 4$

$S=\displaystyle\int_2^4 \frac{t^2-2}{2t}\cdot\frac{t^2-2}{2t^2}dt=\int_2^4\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$=\left[\dfrac{t^2}{8}-\log|t|-\dfrac{1}{2t^2}\right]_2^4=\dfrac{51}{32}-\log 2$ …(答)