数理

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

（数理・情報システム学科）

（前期日程）

| コード | | 得点 | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | | | | | | | | |
| 7 | 8 | | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |

| 採点欄 |
|---|
| |

**2**

$0<t<1$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(t-1,\ -2t+1)$

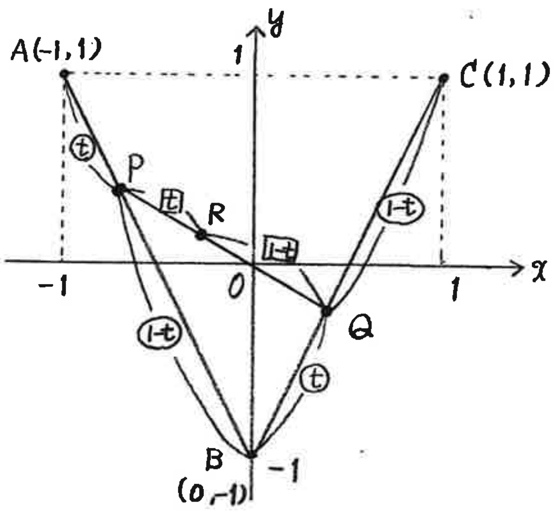
$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(t,\ 2t-1)$

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=(2t-1,\ 4t^2-4t+1)$

$=(2t-1,\ (2t-1)^2)$

よって、求める点Rの座標は、

$R(2t-1,\ (2t-1)^2)$ ---（答）




(2) ［証明］

2点P, Qを通る直線 $l$ は、

$$l:\ y-(2t-1)=\frac{(2t-1)-(-2t+1)}{t-(t-1)}(x-t)$$

$$y=(4t-2)x-4t^2+4t-1$$

$$=2(2t-1)x-(2t-1)^2 \quad \cdots ①$$

また、(1)の結果より、点 $R(2t-1,\ (2t-1)^2)$ は、確かに $y=x^2$ 上の点であり、
点Rにおける接線の方程式は、$y'=2x$ だから、

$$y-(2t-1)^2=2(2t-1)(x-(2t-1))$$

$$y=2(2t-1)x-(2t-1)^2 \quad \cdots ②$$

よって、①と②は、一致している。
したがって、直線 $l$ が、曲線 $y=x^2$ の点Rにおける接線であることが示された。［証明終］

(3) (1)の結果より点Rの $x$ 座標を $x=2t-1$ とおくと
$0<t<1$ だから $-1<x<1$

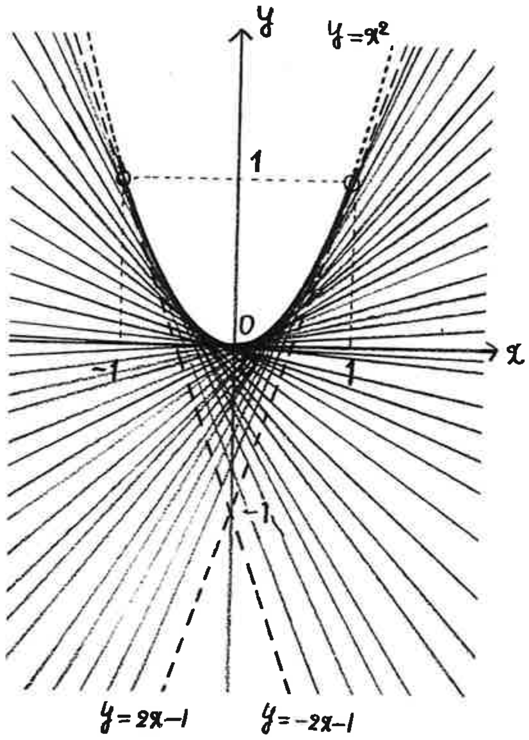
このとき(2)の結果から、直線 $l$ の通過領域をDとすると、

領域Dは、

$$\begin{cases} 2x-1<y<-2x-1 & (x\leqq -1) \\ 2x-1<y\leqq x^2 & (-1<x<0) \\ -2x-1<y\leqq x^2 & (0\leqq x<1) \\ -2x-1<y<2x-1 & (x\geqq 1) \end{cases}$$

と表される。

よって、求める領域は、図の斜線部分。



数理・医





数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=4$, $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角が$\frac{2}{3}\pi$だから $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$となり

$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=49$

$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|\geqq 0$ より　$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=\underline{7}$ …(答)

(2) $\sin 4\alpha=\sin(3\alpha+\alpha)=\sin 3\alpha\cos\alpha+\cos 3\alpha\sin\alpha$

$\sin 4\alpha=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\cos\alpha+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\sin\alpha$ ―(#)

$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

このとき(#)より　$\sin 4\alpha=4\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{7\sqrt{15}}{32}$

したがって、$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 3\times 4\sin 4\alpha=\underline{\underline{\frac{21\sqrt{15}}{16}}}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{OA}=3(\cos\beta,\sin\beta)$, $\overrightarrow{OB}=4(\cos\gamma,\sin\gamma)$ とおく　(ただし、$0<\beta,\gamma<2\pi$ とする)

$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-12\overrightarrow{OE}=(12\cos\beta+12\cos\gamma-12,\ 12\sin\beta+12\sin\gamma)=\vec{0}$ より

$\begin{cases}\cos\beta+\cos\gamma-1=0\\ \sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\gamma=1-\cos\beta\\ \sin\gamma=-\sin\beta\end{cases}$

$\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$ より

$(1-\cos\beta)^2+(-\sin\beta)^2=1$

$2-2\cos\beta=1$

$\cos\beta=\frac{1}{2}$ 、このとき $\cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\beta<\gamma$ とすると $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{5}{3}\pi$　(このとき、$\sin\gamma=-\sin\beta$ をみたす)

$\beta>\gamma$ とすると $\beta=\frac{5}{3}\pi$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$

$\beta=\gamma$ とするとき $\sin\beta=-\sin\alpha$ に不適

以上より

$\underline{\underline{\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{2},\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=(2,\mp 2\sqrt{3})\ (複号同順)}}$ …(答)

数理・医

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

| 採点欄 |
|---|
| |

**4**

(1) $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ なので 増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\frac{-1}{e^2}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{-2}{e^2}$ | ↘ | $\frac{-1}{e}$ | ↗ |

変曲点は $\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$

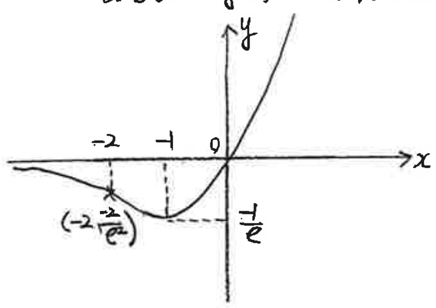
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x$

$x = -t$ とおくと $x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$ なので

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} (-te^{-t}) = 0$

したがって $y = f(x)$ のグラフの概形は図のようになる




… (答)

(2) (1)のグラフから 求める2つの部分の面積の和Sは

$S = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$

ここで $\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$ (Cは積分定数) なので

$S = -\left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[xe^x - e^x\right]_0^1$

$= -\left(-1 + \frac{2}{e}\right) + 1 = \underline{\underline{2 - \frac{2}{e}}}$ … (答)

(3) (1)のグラフから $t \leqq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{-1}{e} \leqq f(t) \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$2 < e < 3$ だから $\frac{-1}{2} < \frac{-1}{e} < \frac{-1}{3}$

また, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$ で $2 < e < 3$ なので $\frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{1}{2}\sqrt{e} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

よって $-1 < f(t) < 1$ である

$-1 < f(t) < 1$ で特に $f(t) \neq 1$ なので 与えられた漸化式は

$a_{n+1} - \frac{1}{1-f(t)} = f(t)\left(a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right)$ と変形できる

よって $a_n = \left(a_1 - \frac{1}{1-f(t)}\right)\{f(t)\}^{n-1} + \frac{1}{1-f(t)}$ である

$-1 < f(t) < 1$ であるから $\{a_n\}$ は収束する (証明終)

数理・医

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

| 採点欄 |
|---|
| |

**5**

(1) $A(2,0)$, $H(1,y)$ とすると
題意より　$PA=\sqrt{2}PH$　となればよい
$PH^2=2PH^2$ から
$(x-2)^2+y^2=2|x-1|^2$
整理して　$C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ …(答)

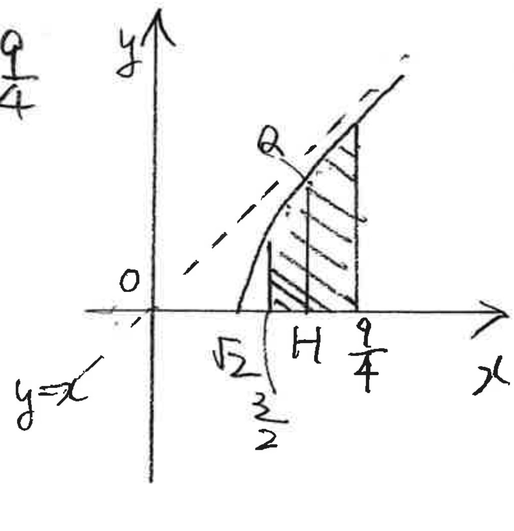
(2) $x+y=t$ から $y=t-x$ これを $C$ の式に代入して

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(t-x)^2}{2}=1$$

これから $t\neq 0$ より $x=\dfrac{t^2+2}{2t}$

$$y=t-\frac{t^2+2}{2t}=\frac{t^2-2}{2t}\qquad \therefore Q\left(\frac{t^2+2}{2t},\ \frac{t^2-2}{2t}\right)\cdots(\text{答})$$

(3) (2) より $t=2$ のとき $x=\dfrac{3}{2}$, $t=4$ のとき $x=\dfrac{9}{4}$
求める面積を $S$ とすると




$$S=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} y\,dx$$

ここで $x=\dfrac{t^2+2}{2t}$ から $dx=\dfrac{t^2-2}{2t^2}dt$

| $x$ | $\frac{3}{2}\to\frac{9}{4}$ |
|---|---|
| $t$ | $2\to 4$ |

$$S=\int_2^4 \frac{t^2-2}{2t}\cdot\frac{t^2-2}{2t^2}dt=\int_2^4\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{8}-\log|t|-\frac{1}{2t^2}\right]_2^4=\frac{51}{32}-\log 2\ \cdots(\text{答})$$