受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

（医学部医学科）

コード		得点	1		3		4		5	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄

1

(1) $\sqrt{n^2+7}=l$ （lは整数）とおくと

$n^2+7=l^2$ より $(l+n)(l-n)=7$

$l+n,\ l-n$は整数で $l+n>l-n>0$ より

$\therefore (l+n,\ l-n)=(7,\ 1)$

これから $l=4,\ n=3$ $\therefore n=3$ …（答）

(2) $\sqrt{n^2+7^2}=m$ （mは自然数）とおく

(1)と同様にして

$(m+n)(m-n)=7^2$

$m+n,\ m-n$は整数で $m+n>m-n>0$ より

$(m+n,\ m-n)=(7^2,\ 1)$

これから $m=25,\ n=24$ $\therefore n=24$ …（答）

(3) $\sqrt{n^2+7^k}=L$ （Lは自然数）とおくと

(1)(2)と同様にして

$(L+n)(L-n)=7^k$

$L+n,\ L-n$は整数で、$L+n>L-n>0$ より

$\alpha=\left[\frac{k-1}{2}\right]$ とすると

$(L+n,\ L-n)=(7^k,\ 1),\ (7^{k-1},\ 7),\ (7^{k-2},\ 7^2),$

$\cdots(7^{k-\alpha},\ 7^\alpha)$

よって
$$\left\{\begin{array}{l} n=\frac{7^k-1}{2},\ \frac{7^{k-1}-7}{2},\ \frac{7^{k-2}-7^2}{2},\ \cdots\ \frac{7^{k-\alpha}-7^\alpha}{2} \\ \text{ただし、}\alpha\text{は}\ \frac{k-1}{2}\ \text{を超えない最大の整数} \end{array}\right.$$
…（答）

受 験 番 号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

医学科

採点欄	

3

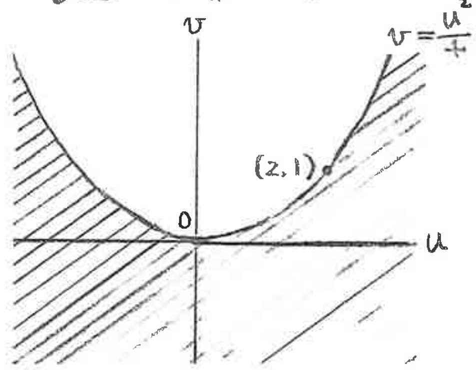
(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=2$ よって $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\underline{\underline{21}}$ …(答)

(2) 2次方程式 $t^2-ut+v=0$ の判別式をDとすると $D\geqq 0$ であるから

$(-u)^2-4v\geqq 0 \quad \therefore v\leqq \frac{u^2}{4}$

よって、(u, v) の存在範囲は、右図の

境界線 $v=\frac{u^2}{4}$ を含む斜線部である



(3) $a+b=u,\ ab=v$ とすると

a, b は2次方程式 $t^2-ut+v=0$ の実数解であるから(2)より $v\geqq\frac{u^2}{4}$ …①

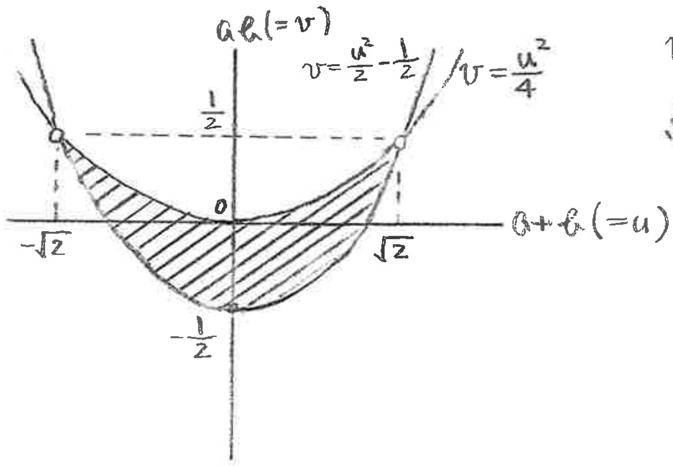
そして、(a, b) は原点中心半径1の円の内部を動くことより

$a^2+b^2<1$ である

すると $(a+b)^2-2ab<1$ となり、$u^2-2v<1$ すなわち $v>\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}$ …②

よって、$(a+b, ab)$ すなわち (u, v) の動いてできる領域は、①かつ②より

次の図の斜線部分となる。ただし、境界線 $v=\frac{u^2}{4}$ は含むが、



$v=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}$ は含まない。

点 $(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ については、含まない

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

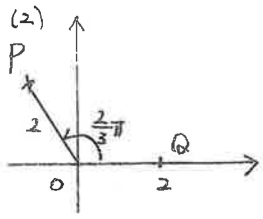
医学科

採点欄

4

(1) $-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ ...(答)

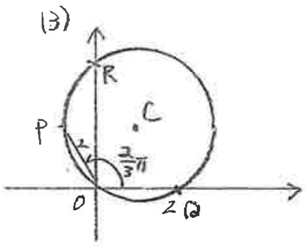
(2)



(1)より △OPQ は $\angle QOP = \frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形なので

$\angle OPQ = \frac{\pi}{6}$ ....(答)

(3)



$OP = OQ = 2$、$\angle QOP = \frac{2}{3}\pi$ なので

3点 O、P、Q を通る円の中心を $C(c)$ とすると

$CQ = CO = CP$ なので $\triangle CQO \equiv \triangle CPO$

したがって $OC = 2$、$\angle QOC = \frac{\pi}{3}$ となる

よって $c = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$

また、$\angle POR = \frac{\pi}{6}$ なので 円周角の定理から $\angle PCR = \frac{\pi}{3}$

よって $OR = 2\sqrt{3}$ なので R を表す複素数は $2\sqrt{3}i$ ...(答)

(4) $w = \frac{z-1}{z-c}$ より $z = \frac{cw-1}{w-1}$

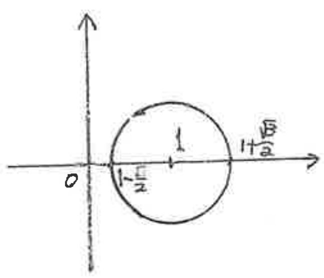
点 z は円 C 上を動くので $|z-c| = 2$

よって $\left|\frac{cw-1}{w-1} - c\right| = 2$

$\left|\frac{c-1}{w-1}\right| = 2$

$|w-1| = \frac{|c-1|}{2} = \frac{|\sqrt{3}i|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

つまり w がえがく図形は D(1) が中心 半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円



.....(答)

受 験 番 号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数 学 解 答 用 紙

医学科

採点欄

5

(1) $y=x$ を $C(\alpha)$ に代入

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+\frac{x^2}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$x^2\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\times\sin^2\alpha}\right)=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

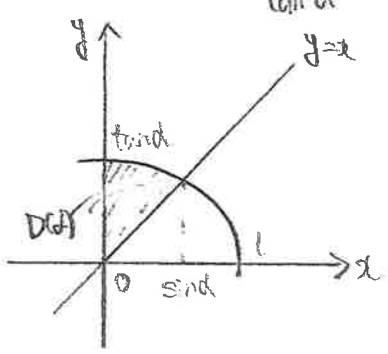
$$x^2=\sin^2\alpha$$

$$x=\pm\sin\alpha$$

$x>0,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $x=\sin\alpha$

したがって、交点は $(\sin\alpha,\sin\alpha)$ …(答)

(2) $C(\alpha):\ x^2+\dfrac{y^2}{\tan^2\alpha}=1$



$$y^2=\tan^2\alpha\,(1-x^2)$$

$y>0,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha>0$ だから

$$y=\tan\alpha\sqrt{1-x^2}$$

$$S(\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\tan\alpha\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\ \cdots①$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求める。

$x=\sin\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow\sin\alpha$
θ	$0\longrightarrow\alpha$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ なので

$$\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\sin2\alpha}{2}\right)$$

これを①に代入すると

$$S(\alpha)=\frac{\tan\alpha}{2}\left(\alpha+\frac{\sin2\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$S(\alpha)=\frac{\alpha\tan\alpha}{2}\ \cdots(答)$$

(3)

$$V(\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\pi y^2\,dx-\frac{1}{3}\pi(\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=\pi(\tan^2\alpha)\int_0^{\sin\alpha}(1-x^2)\,dx-\frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$=\pi(\tan^2\alpha)\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sin\alpha}-\frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$=\pi(\tan^2\alpha)\left(\sin\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}\right)-\frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$=\pi(\tan^2\alpha)\sin\alpha-\frac{\pi}{3}\sin^3\alpha(\tan^2\alpha+1)$$

$$V(\alpha)=\frac{2}{3}\pi(\tan^2\alpha)\sin\alpha\ \cdots(答)$$

(4)

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^2}$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\frac{4}{9}\pi^2(\tan^4\alpha)(\sin^2\alpha)}{\frac{\alpha^3\tan^3\alpha}{8}}$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\left\{\frac{32}{9}\pi^2\times\frac{\tan\alpha}{\alpha}\times\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\left\{\frac{32}{9}\pi^2\times\cos\alpha\times\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{32}{9}\pi^2\times1\times1\times1^2$$

$$=\frac{32}{9}\pi^2\ \cdots(答)$$