受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

（数理・情報システム学科）

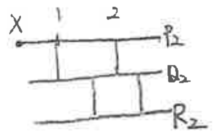
（前期日程）

コード		得点	2		3		4		5	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	

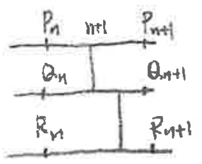
2

(1)



図より　$a_2=2$, $b_2=3$ … (答)

(2)



P_{n+1}に到達するのは　P_nを経由してP_{n+1}に到達する

Q_nを経由してP_{n+1}に到達する

いずれかでこれらには重複はないので

$a_{n+1}=a_n+b_n$ … (答)

(3) (2)と同様に考えて　Q_{n+1}に到達するのは　P_nを経由してQ_{n+1}に到達する

Q_nを経由してQ_{n+1}に到達する

R_nを経由してQ_{n+1}に到達する

このいずれかでこれらには重複はないので

$b_{n+1}=a_n+b_n+c_n$

同様にには　$c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$　となる

数学的帰納法を用いて　$b_n=c_n$が成り立つことを示す.

(I) $n=1$のとき　$b_1=1$、$c_1=1$なので成り立つ

(II) $n=k$のとき成り立つとすれば　$b_k=c_k$で

$b_{k+1}=a_k+b_k+c_k$

$c_{k+1}=a_k+b_k+c_k$　なので　$n=k+1$のときも成り立つ

(I)(II)より　すべての自然数に対して　$b_n=c_n$が成り立つ　(証明終)

(4) あ)　$f_n=a_k$のとき　$f_{n+1}=b_k$、$f_{n+2}=a_{k+1}$　である.

(2)より　$a_{k+1}=a_k+b_k$　なので

$f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$

い)　$f_n=b_k$のとき　$f_{n+1}=a_{k+1}$、$f_{n+2}=b_{k+1}$　である

(3)より　$b_{k+1}=a_k+b_k+c_k$　で

$a_{k+1}=a_k+b_k$、$b_k=c_k$なので

$b_{k+1}=a_{k+1}+b_k$

よって　$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$

あ)い)より　すべての自然数nに対して　$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ … (答)

$f_1=a_1=1$、$f_2=b_1=1$、$f_3=f_2+f_1=2$、$f_4=f_3+f_2=3$、$f_5=f_4+f_3=5$、$f_6=f_5+f_4=8$、$f_7=f_6+f_5=13$

$f_8=f_7+f_6=21$、$f_9=f_8+f_7=34$、$f_{10}=f_9+f_8=55$、$f_{11}=f_{10}+f_9=89$、$f_{12}=f_{11}+f_{10}=144$

$f_{13}=f_{12}+f_{11}=233$

$a_7=f_{13}=233$ … (答)

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

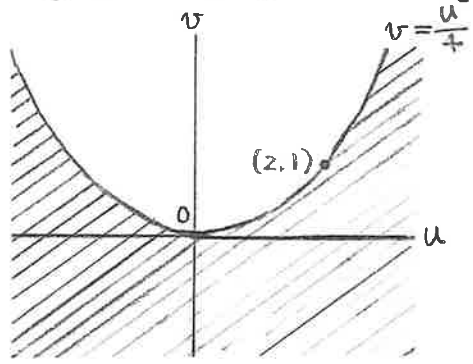
3

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=2$　よって $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\underline{\underline{21}}$ …(答)

(2) 2次方程式 $t^2-ut+v=0$ の判別式をDとすると $D\geqq 0$ であるから

$(-u)^2-4\cdot v\geqq 0$　$\therefore v\leqq\dfrac{u^2}{4}$

よって、(u, v) の存在範囲は、右図の境界線 $v=\dfrac{u^2}{4}$ を含む斜線部である



(3) $a+b=u$, $ab=v$ とすると

a, bは2次方程式 $t^2-ut+v=0$ の実数解であるから(2)より $v\geqq\dfrac{u^2}{4}$ …①

そして、(a, b) は原点中心、半径1の円の内部を動くことより

$a^2+b^2<1$ である

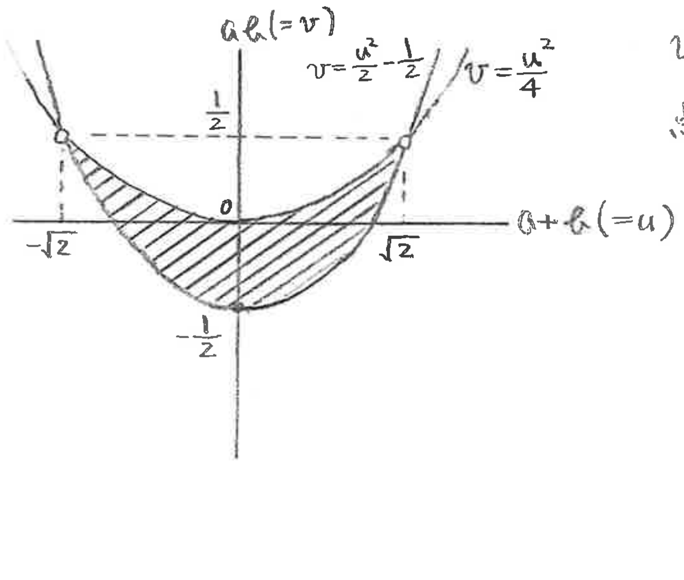
すると $(a+b)^2-2ab<1$ となり、$u^2-2v<1$ すなわち $v>\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ …②

よって、$(a+b, ab)$ すなわち (u, v) の動いてできる領域は、①かつ②より

次の図の斜線部分となる。ただし、境界線 $v=\dfrac{u^2}{4}$ は含むが、

$v=\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ は含まない。

点 $(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ については、含まない



受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

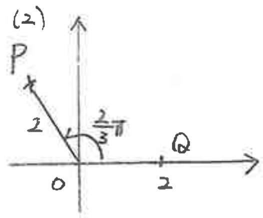
数学　解答用紙

採点欄

4

(1) $-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ ……(答)

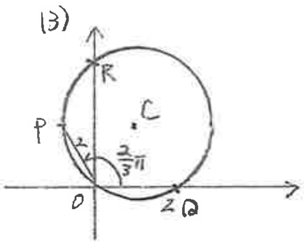
(2)



(1)より △OPQは$\angle QOP=\frac{2}{3}\pi$の二等辺三角形なので

$\angle OPQ = \frac{\pi}{6}$ ……(答)

(3)



$OP=OQ=2$、$\angle QOP=\frac{2}{3}\pi$ なので

3点O, P, Qを通る円の中心をC(c)とすると

$CQ=CO=CP$ なので $\triangle CQO \equiv \triangle CPO$

したがって $OC=2$、$\angle QOC=\frac{\pi}{3}$ となる

よって $c=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$

また、$\angle POR=\frac{\pi}{6}$ なので円周角の定理から $\angle PCR=\frac{\pi}{3}$

よって $OR=2\sqrt{3}$ なので Rを表す複素数は $2\sqrt{3}i$ ……(答)

(4) $w=\frac{z-1}{z-c}$ より $z=\frac{cw-1}{w-1}$

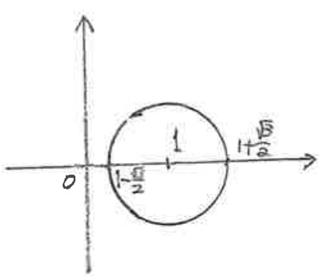
点zは円C上を動くので $|z-c|=2$

よって $\left|\frac{cw-1}{w-1}-c\right|=2$

$\left|\frac{c-1}{w-1}\right|=2$

$|w-1|=\frac{|c-1|}{2}=\frac{|\sqrt{3}i|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

つまり wがえがく図形は D(1)が中心 半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円



……(答)

受 験 番 号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

5

(1) $y = x$ を $C(\alpha)$ に代入

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{x^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$x^2\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \times \sin^2\alpha}\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

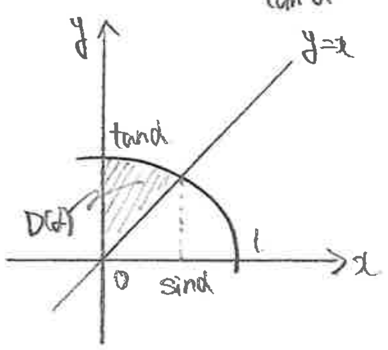
$$x^2 = \sin^2\alpha$$

$$x = \pm \sin\alpha$$

$x > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $x = \sin\alpha$

したがって, 交点は $(\sin\alpha, \sin\alpha)$ …(答)

(2) $C(\alpha)$: $x^2 + \frac{y^2}{\tan^2\alpha} = 1$



$$y^2 = \tan^2\alpha\,(1 - x^2)$$

$y > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha > 0$ から

$$y = \tan\alpha\sqrt{1 - x^2}$$

$$S(\alpha) = \int_0^{\sin\alpha} \tan\alpha\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \quad \cdots ①$$

ここで $\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求める.

$x = \sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow \sin\alpha$
θ	$0 \longrightarrow \alpha$

$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ なので

$$\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\alpha}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\alpha}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$$

これを①に代入すると

$$S(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{2}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$S(\alpha) = \frac{\alpha\tan\alpha}{2} \quad \cdots (答)$$

(3)
$$V(\alpha) = \int_0^{\sin\alpha}\pi y^2\,dx - \frac{1}{3}\pi(\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= \pi(\tan^2\alpha)\int_0^{\sin\alpha}(1-x^2)\,dx - \frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$= \pi(\tan^2\alpha)\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sin\alpha} - \frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$= \pi(\tan^2\alpha)\left(\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^3\alpha$$

$$= \pi(\tan^2\alpha)\sin\alpha - \frac{\pi}{3}\sin^3\alpha(\tan^2\alpha + 1)$$

$$V(\alpha) = \frac{2}{3}\pi(\tan^2\alpha)\sin\alpha \quad \cdots (答)$$

(4)
$$\lim_{\alpha \to +0}\frac{\{V(\alpha)\}^2}{\{S(\alpha)\}^2}$$

$$= \lim_{\alpha \to +0}\frac{\frac{4}{9}\pi^2(\tan^4\alpha)(\sin^2\alpha)}{\frac{\alpha^3\tan^3\alpha}{8}}$$

$$= \lim_{\alpha \to +0}\left\{\frac{32}{9}\pi^2 \times \frac{\tan\alpha}{\alpha} \times \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$= \lim_{\alpha \to +0}\left\{\frac{32}{9}\pi^2 \times \cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\alpha} \times \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{32}{9}\pi^2 \times 1 \times 1 \times 1^2$$

$$= \frac{32}{9}\pi^2 \quad \cdots (答)$$