受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください

数学　解答用紙

〔物質科学科，地球資源環境学科
機械・電気電子工学科
建築・生産設計工学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) 1枚取り出したとき偶数である確率は $\frac{2}{5}$

奇数である確率は $\frac{3}{5}$ である

a_1 が偶数となる確率は $\frac{2}{5}$　$\therefore p_1 = \frac{2}{5}$ …(答)

a_1+a_2 が偶数となる確率は2回とも偶数か2回とも奇数のとき

$\therefore p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$ …(答)

(2) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ が偶数となるのは次の2つの場合がある。

(i) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が偶数で a_{n+1} が偶数のとき

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が奇数で a_{n+1} が奇数のとき

$\therefore p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{3}{5}$

$\therefore p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ …(答)

(3) (2)の式は $p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できる

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$、

公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列

$\therefore p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2}$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

この線より上には解答を記入しないでください

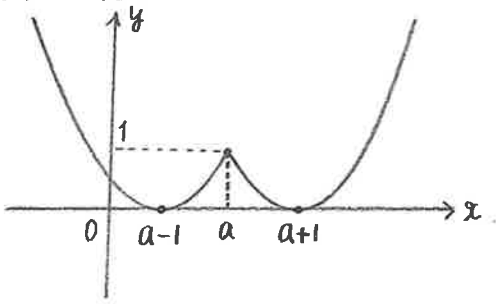
数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $f(x)=(|x-a|-1)^2=\begin{cases}(x-a-1)^2 & (x\geqq a\text{のとき})\\ \{-(x-a)-1\}^2=(x-a+1)^2 & (x<a\text{のとき})\end{cases}$

よって、グラフの概形は、



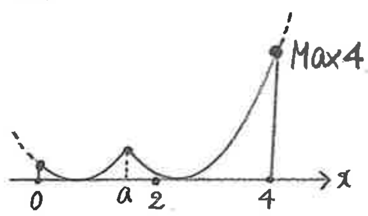
(2) (1)より、$y=f(x)$ のグラフは、直線 $x=a$ に関して対称であるから、

(i) $a\leqq 2$ のとき、$f(x)$ が最大となるのは、$x\geqq a$ のときで

最大値 $f(4)=(3-a)^2=4$

$a-3=\pm 2$　$\therefore\ a=1,5$

$a\leqq 2$ より、$a=1$

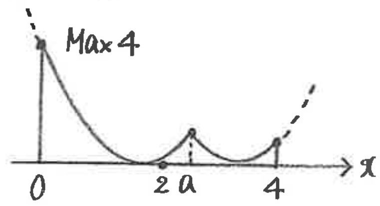


(ii) $a\geqq 2$ のとき、$f(x)$ が最大となるのは、$x<a$ のときで

最大値 $f(0)=(-a+1)^2=4$

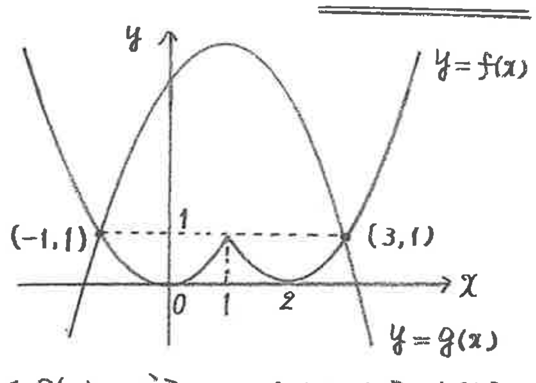
$a-1=\pm 2$　$\therefore\ a=-1,3$

$a\geqq 2$ より、$a=3$



したがって、(i)(ii)より求める a の値は、$a=1,3$ ---(答)

(3) $a=1$ より、



不等式 $f(x)\leqq g(x)$ の解が $-1\leqq x\leqq 3$ となるのは、

グラフの考察より、$y=g(x)$ が点 $(-1,1)$, $(3,1)$ を通るときより

$g(-1)=-1-b+c=1$ ——①

$g(3)=-9+3b+c=1$ ——②

①, ② より　$b=2,\ c=4$ ---(答)　(このとき、確かに題意を満たす。)

受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

ここで、$f'(x)=0$ とすると、$1-\log x=0$ $\therefore x=e$

増減表は、

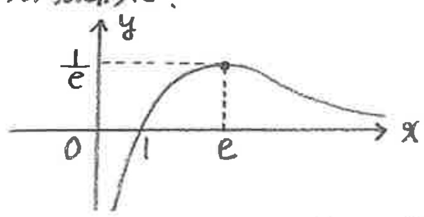
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

よって、$x=e$ のとき 極大値 $\dfrac{1}{e}$ ---(答)

このとき、グラフの概形は、



(2) (1)より、$f(x)$は、$x\geqq e$ のとき 単調減少 であり、

$e<\pi$ より $f(e)>f(\pi)$ である。

よって、$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$

$\pi\log e>e\log\pi$

$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

底$e>1$より $e^{\pi}>\pi^{e}$ （証明終）

(3) (1)の増減表より、$0<x\leqq e$ のとき $f(x)$は単調増加である。

$0<e<\pi<4$ より $\sqrt{e}<\sqrt{\pi}<2<e$ だから、

$f(\sqrt{e})<f(\sqrt{\pi})$

よって、$\dfrac{\log\sqrt{e}}{\sqrt{e}}<\dfrac{\log\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\log e<\frac{1}{2}\sqrt{e}\log\pi$

$\log e^{\sqrt{\pi}}<\log\pi^{\sqrt{e}}$

底$e>1$より

$e^{\sqrt{\pi}}<\pi^{\sqrt{e}}$ （証明終）