受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください

数学　解答用紙

〔物質科学科，地球資源環境学科
機械・電気電子工学科
建築・生産設計工学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) 1枚取り出したとき偶数である確率は $\frac{2}{5}$

奇数である確率は $\frac{3}{5}$ である

a_1が偶数となる確率は $\frac{2}{5}$　$\therefore p_1 = \frac{2}{5}$ …(答)

a_1+a_2が偶数となる確率は2回とも偶数か2回とも奇数のとき

$\therefore p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$ …(答)

(2) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ が偶数となるのは次の2つの場合がある。

(i) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が偶数で a_{n+1}が偶数のとき

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が奇数で a_{n+1}が奇数のとき

$\therefore p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{3}{5}$

$\therefore p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ …(答)

(3) (2)の式は $p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できる

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$、

公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列

$\therefore p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2}$ …(答)

受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $|\overrightarrow{OA}|^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=12+4$ で $OA=4$

$|\overrightarrow{OB}|^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+1=3+12+1=16$ で $OB=4$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2\cdot 1=6+2=8$ だから

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=16+16-2\cdot 8$

$=16$

$\therefore AB=4$

よって $OA=OB=AB=4$ となり3辺が等しいので三角形OABは正三角形…(答)

(2) 四面体OABCが正四面体となる条件は

$OC=AC=BC=4$ …①

となることである。

$C=(x,y,z)$ とおくと ①より

$|\overrightarrow{OC}|^2=x^2+y^2+z^2=16$ …②

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=16+16-2(2\sqrt{3}x+2z)=16$

$\therefore \sqrt{3}x+z=4$ …③

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=16+16-2(\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z)=16$

$\therefore \sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z=8$ …④

④−③ から $2\sqrt{3}y=4$　$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ …⑤

③ より $z=4-\sqrt{3}x$ …⑥

⑤,⑥を②に代入して

$x^2+(4-\sqrt{3}x)^2=\frac{44}{3}$

$\therefore 3x^2-6\sqrt{3}x+1=0$

これを解くと $x=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{27-3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}{3}$ …⑦

⑦を⑥に代入して

$z=4-\frac{\sqrt{3}(3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6})}{3}=\frac{3\mp 6\sqrt{2}}{3}=1\mp 2\sqrt{2}$

よって $C\left(\frac{3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 1\mp 2\sqrt{2}\right)$ (複号同順)…(答)

受 験 番 号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数 学 解 答 用 紙

採点欄

3

(1) $f(x)=g(x)$ とすると $p^2(x-\alpha)^2=q^2(x-\beta)^2$

$$\{p(x-\alpha)\}^2-\{q(x-\beta)\}^2=0$$

$$\{p(x-\alpha)-q(x-\beta)\}\{p(x-\alpha)+q(x-\beta)\}=0$$

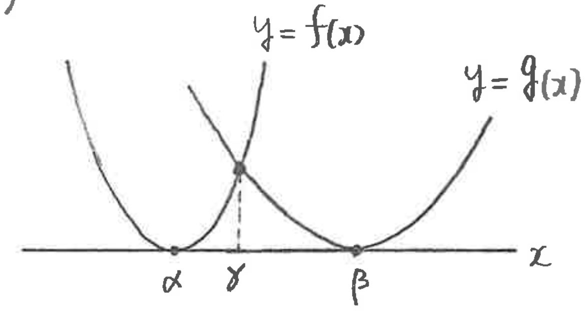
$$\{(p-q)x-(p\alpha-q\beta)\}\{(p+q)x-(p\alpha+q\beta)\}=0$$

(i) $p=q$ のとき $x=\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$ いま $p>0,\ q>0$ なので、これは α,β を $p:q$ に内分する点,
(α と β の間にある)

(ii) $p\neq q$ のとき $x=\dfrac{p\alpha-q\beta}{p-q},\ \dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$

$p>0,\ q>0$ なので $\dfrac{p\alpha-q\beta}{p-q}$ は α,β を $p:q$ に外分する点,(α と β の間にない)
$\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$ は α,β を $p:q$ に内分する点,(α と β の間にある)

(i),(ii) より求める x 座標は $\underline{\underline{x=\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}}}$ …(答)



(2) $\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}=\gamma$ とすると、図より

$$S=\int_\alpha^\gamma p^2(x-\alpha)^2dx+\int_\gamma^\beta q^2(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{p^2}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\gamma+\left[\frac{q^2}{3}(x-\beta)^3\right]_\gamma^\beta$$

$$=\frac{p^2}{3}(\gamma-\alpha)^3-\frac{q^2}{3}(\gamma-\beta)^3$$

$$=\frac{p^2}{3}\cdot\frac{q^3(\beta-\alpha)^3}{(p+q)^3}+\frac{q^2}{3}\cdot\frac{p^3(\beta-\alpha)^3}{(p+q)^3}=\frac{p^2q^2(\beta-\alpha)^3}{(p+q)^3}\cdot(p+q)=\underline{\underline{\frac{p^2q^2(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}}}\cdots(\text{答})$$

(3) $pq=1$ のとき、(2) より $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}$

いま、$p>0,\ q>0$ で、$pq=1$ なので $p+q\geqq 2\sqrt{pq}=2$
(等号成立は $p=q$ すなわち $p=q=1$ のとき)

$$\therefore\ \frac{1}{p+q}\leqq\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{(p+q)^2}\leqq\frac{1}{4}$$

$\alpha<\beta$ より $\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}\leqq\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ よって $S\leqq\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ となる

S が最大となるのは等号が成り立つときで、
このとき、$\underline{\underline{p=q=1}}$ …(答)