志望学部	受験番号
医 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

I・II・III・A・B

〔I〕

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ …(答)

(2) $b_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore a_n-b_n=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=-n(2n+1)$ …(答)

(3) $c_n=a_{n+1}-b_n$

$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n+3)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=(n+1)(2n+1)$

ここで c_nが6の倍数となるのは、$2n+1$が奇数より nは奇数であるから、$n=6k+1, 6k+3, 6k+5$ $(k=0,1,2\cdots)$を考えればよい。

(i) $c_{6k+1}=(6k+2)(12k+3)=6(3k+1)(4k+1)$ より 6の倍数である

(ii) $c_{6k+3}=(6k+4)(12k+7)=2(3k+2)\{3\times(4k+2)+1\}$

より 6の倍数ではない

(iii) $c_{6k+5}=(6k+6)(12k+11)=6(k+1)(12k+11)$ で6の倍数である

以上より求める nの条件は

6でわると余りが1か5の自然数 …(答)

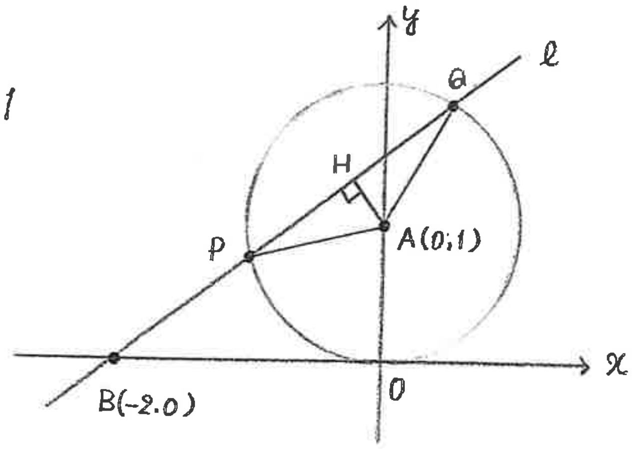
得点	

志望学部	受験番号
医　学部	番

数学　平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅱ〕



$C: x^2+y^2-2y=0$ より $x^2+(y-1)^2=1$

(1) 点A(0,1)と直線$\ell: kx-y+2k=0$ との距離をdとすると

$$d=\frac{|0-1+2k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} \text{ ---(答)}$$

(2) 直線ℓと円Cが異なる2点で交わるためには、$d<$ 半径$=1$ より

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1 \quad \text{より}. \quad |2k-1|^2=k^2+1$$

$$\therefore k(3k-4)<0$$

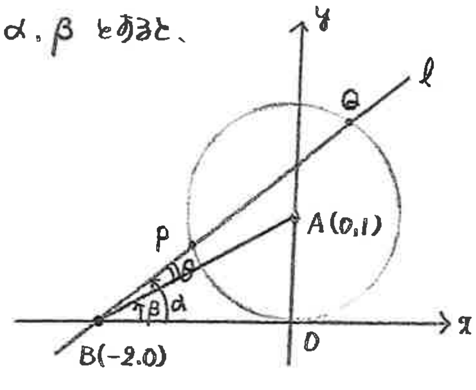
よって、求めるkの範囲は $0<k<\frac{4}{3}$ ---(答)

(3) 点Aから直線ℓへの垂線の足をHとすると、$PH=\frac{1}{2}PQ=\sqrt{k}$ であり、三平方の定理より $PH^2=AP^2-AH^2$ だから

$$(\sqrt{k})^2=1-\frac{|2k-1|^2}{k^2+1}$$
$$k(k^2+1)=(k^2+1)-(2k-1)^2$$
$$k(k^2+3k-3)=0$$
$$\therefore k=0,\ \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$$

(2)より、$0<k<\frac{4}{3}$ だから、$k=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ ---(答)

(4) 直線ℓ, 直線ABとx軸の正の向きとのなす角をそれぞれα, βとすると、



$$\tan\alpha=k=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}, \quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

このとき、$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}>\frac{1}{2}$ だから、$\theta=\alpha-\beta$

よって、

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{21}-8}{\sqrt{21}-1}$$

$$=\frac{5-\sqrt{21}}{2} \text{ ---(答)}$$

得点	

志望学部	受験番号
医 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔III〕

(1) $y^2-2xy+x^4=0$

$(y-x)^2=x^2-x^4$

$y-x=\pm\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$y=x\pm|x|\sqrt{1-x^2}$

$y=x\pm x\sqrt{1-x^2}$

このとき, xのとり得る範囲は

$1-x^2\geqq 0$ より $-1\leqq x\leqq 1$

$y=x+x\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ について考える

$y'=1+\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$y'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると.

$\sqrt{1-x^2}+1-2x^2=0$

$\sqrt{1-x^2}=2x^2-1$

左辺が正より $2x^2-1\geqq 0$ と $-1<x<1$ から

$-1<x\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x<1$ で考える …①

両辺を2乗して, 整理すると

$x^2(4x^2-3)=0$

① より $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき, 増減表は, 次のようになる

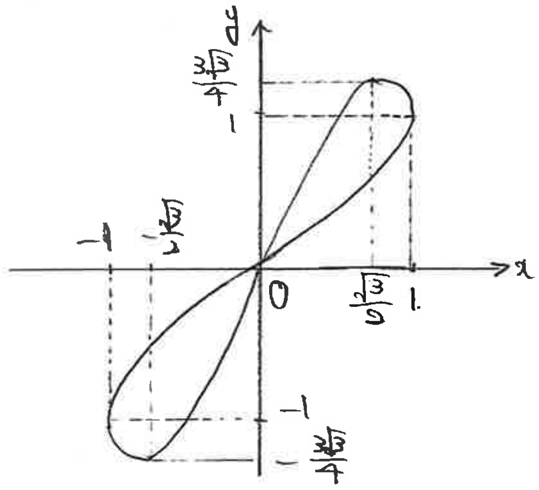
x	-1	…	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	…	1
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

次に, $y=x-x\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ について考える

$y'=1-\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\geqq 0$ より

$-1<x<1$ では単調増加.

したがって, グラフは, 次のようになる。



上図より

x座標が最大となる点は$(1, 1)$ …(答)

y座標が最大となる点は$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ …(答)

(2) 求める面積をSとおく, 曲線Cは原点対称なので

$S=2\int_0^1\{x+x\sqrt{1-x^2}-(x-x\sqrt{1-x^2})\}dx$

$=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\dfrac{4}{-2}\int_0^1(1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=-2\left[\dfrac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$=-2\left(0-\dfrac{2}{3}\right)$

$S=\dfrac{4}{3}$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅳ〕

(1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^{\beta} - (\log x) \times \beta x^{\beta-1}}{(x^{\beta})^2} = \dfrac{1-\beta \log x}{x^{\beta+1}}$

ここで，$f'(x) = 0$ とすると $\log x = \dfrac{1}{\beta}$

$x = e^{\frac{1}{\beta}}$

このとき，増減表は

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\nearrow$	$\frac{1}{\beta e}$	$\searrow$

したがって，$x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき，極大値 $\dfrac{1}{\beta e}$ …(答)

(2) $\dfrac{t^2}{2} < e^t$ ，$t > 0$ より

$\dfrac{t}{2} < \dfrac{e^t}{t}$ から $0 < \dfrac{t}{e^t} < \dfrac{2}{t}$

$t = \log x$ とおくと

$0 < \dfrac{\log x}{x} < \dfrac{2}{\log x}$ …①

$x > 0$ より，すべての項を $x^{\beta-1}$ で割ると

$0 < \dfrac{\log x}{x^{\beta}} < \dfrac{2}{(\log x)x^{\beta-1}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(\log x)x^{\beta-1}} = 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\beta}} = 0$

つまり $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ …(答)

(3) $I(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\log x}{x^{\beta}}dx = \int_1^a x^{-\beta} \times \log x\, dx$

$= \displaystyle\int_1^a \left(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right)' \log x\, dx$ $(\because \beta > 1)$

$= \displaystyle\left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\log x\right]_1^a - \int_1^a \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \times \frac{1}{x}dx$

$= \displaystyle\left(\frac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - 0\right) - \frac{1}{1-\beta}\int_1^a x^{-\beta}dx$

$= \displaystyle\frac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_1^a$

$= \dfrac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - \dfrac{1}{(1-\beta)^2}(a^{1-\beta} - 1)$

$I(a) = \dfrac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} - \dfrac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \dfrac{1}{(1-\beta)^2}$ …(答)

(4) (2)の①より

$0 < \dfrac{\log a}{a^{\beta-1}} < \dfrac{2}{(\log a)a^{\beta-2}}$ と，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{2}{(\log a)a^{\beta-2}} = 0$ より

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log a}{a^{\beta-1}} = 0$ なので

(3)より

$\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a) = \frac{1}{(1-\beta)^2}$ …(答)

得点	