志望学部	受験番号
工・農・生命 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔I〕

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ …(答)

(2) $b_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore a_n-b_n=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=-n(2n+1)$ …(答)

(3) $c_n=a_{n+1}-b_n$

$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n+3)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=(n+1)(2n+1)$

$c_n>100(n+1)$ から

$(n+1)(2n+1)>100(n+1)$

$\therefore n>\frac{99}{2}=49.5$

よって、求める最小の自然数 n は $n=50$ …(答)

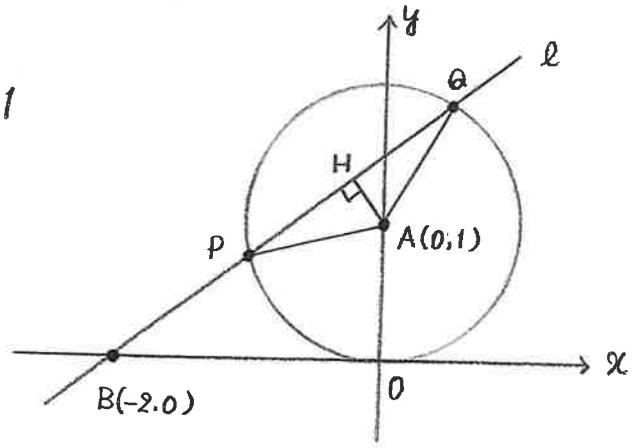
得点	

志望学部	受験番号
工・農・生命 学部	番

数　学　　平成 28 年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔II〕



C: $x^2+y^2-2y=0$ より $x^2+(y-1)^2=1$

(1) 点A(0,1)と直線l: $kx-y+2k=0$
との距離をdとすると

$$d=\frac{|0-1+2k|}{\sqrt{k^2+1^2}}$$

$$=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 直線lと円Cが異なる2点で交わるためには、d < 半径=1 より

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1 \quad \text{より、}\quad |2k-1|^2 = k^2+1$$

$$\therefore k(3k-4)<0$$

よって、求めるkの範囲は $0<k<\dfrac{4}{3}$ ---(答)

(3) 点Aから直線lへの垂線の足をHとすると、 $PH=\dfrac{1}{2}PQ=\sqrt{k}$ であり、
三平方の定理より $PH^2=AP^2-AH^2$ だから

$$(\sqrt{k})^2 = 1-\frac{|2k-1|^2}{k^2+1}$$

$$k(k^2+1)=(k^2+1)-(2k-1)^2$$

$$k(k^2+3k-3)=0$$

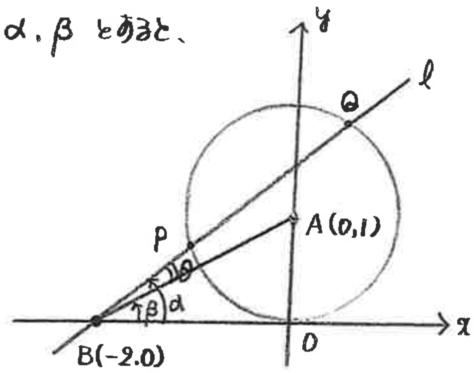
$$\therefore k=0,\ \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$$

(2)より、$0<k<\dfrac{4}{3}$ だから、 $k=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ ---(答)

(4) 直線l, 直線ABとx軸の正の向きとのなす角をそれぞれα, βとすると、

$$\tan\alpha=k=\frac{-3+\sqrt{21}}{2},\quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

このとき、$\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}>\dfrac{1}{2}$ だから、 $\theta=\alpha-\beta$



よって、
$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{21}-8}{\sqrt{21}-1}$$

$$=\frac{5-\sqrt{21}}{2}\quad\cdots(\text{答})$$

得点	

志望学部	受験番号
工・農・生命 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔III〕

(1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^{\beta} - (\log x) \times \beta x^{\beta-1}}{(x^{\beta})^2} = \dfrac{1-\beta\log x}{x^{\beta+1}}$

ここで $f'(x) = 0$ とすると, $\log x = \dfrac{1}{\beta}$

$x = e^{\frac{1}{\beta}}$

このとき, 増減表は

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\beta e}$	$\searrow$

したがって, $x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき, 極大値 $\dfrac{1}{\beta e}$ … (答)

(2) $I(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\log x}{x^{\beta}}dx = \int_1^a x^{-\beta} \times \log x\, dx$

$= \displaystyle\int_1^a \left(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right)' \log x\, dx \quad (\because \beta > 1)$

$= \displaystyle\left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\log x\right]_1^a - \int_1^a \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \times \frac{1}{x}dx$

$= \displaystyle\left(\frac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - 0\right) - \frac{1}{1-\beta}\int_1^a x^{-\beta}dx$

$= \displaystyle\frac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_1^a$

$= \displaystyle\frac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a - \frac{1}{(1-\beta)^2}(a^{1-\beta} - 1)$

$I(a) = \dfrac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} - \dfrac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \dfrac{1}{(1-\beta)^2}$ … (答)

得点	

志望学部	受験番号
工・農・生命 学部	番

数学

平成28年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔IV〕

(1) $y^2-2xy+x^4=0$

$(y-x)^2=x^2-x^4$

$y-x=\pm\sqrt{x^2(1-x^2)}$

$y=x\pm|x|\sqrt{1-x^2}$

$\underline{\underline{y=x\pm x\sqrt{1-x^2}}}$ …(答)

このとき，xの値の取り得る範囲は

$1-x^2\geqq0$ より $\underline{\underline{-1\leqq x\leqq1}}$ …(答)

(2) $y=x+x\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ について考える

$y'=1+\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$y'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると

$\sqrt{1-x^2}+1-2x^2=0$

$\sqrt{1-x^2}=2x^2-1$

左辺が正より $2x^2-1\geqq0$ と $-1<x<1$ から

$-1<x\leqq\frac{1}{\sqrt2}$，$\frac{1}{\sqrt2}\leqq x<1$ で考える。…①

両辺を2乗して，整理すると

$x^2(4x^2-3)=0$

① より $x=\pm\dfrac{\sqrt3}{2}$

このとき，増減表は，次のようになる

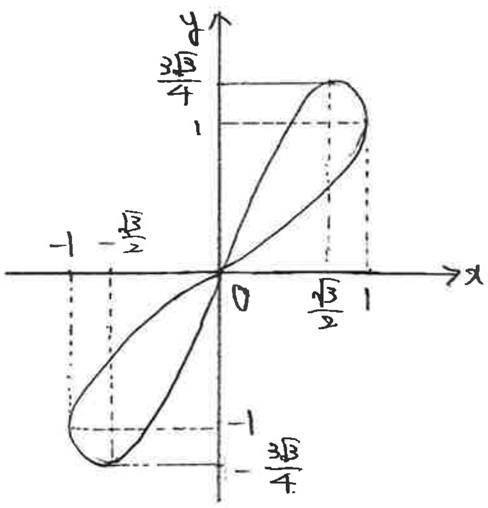
x	-1	…	$-\frac{\sqrt3}{2}$	…	$\frac{\sqrt3}{2}$	…	1
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	-1	↘	$-\frac{3\sqrt3}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt3}{4}$	↘	1

次に，$y=x-x\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ について考える

$y'=1-\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\geqq0$ より

$-1<x<1$ では単調増加

したがって，グラフは次のようになる



上図より

$\underline{\underline{x\text{座標が最大となる点は}(1,1)}}$ …(答)

$\underline{\underline{y\text{座標が最大となる点は}\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac{3\sqrt3}{4}\right)}}$ …(答)

(3) 求める面積をSとおく，曲線Cは原点対称なので

$S=2\int_0^1\{x+x\sqrt{1-x^2}-(x-x\sqrt{1-x^2})\}dx$

$=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\frac{4}{-2}\int_0^1(1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=-2\left[\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$=-2\left(0-\frac{2}{3}\right)$

$\underline{\underline{S=\frac{4}{3}}}$ …(答)

得点	