受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

（医学部医学科）

コード		得点	1		3		4		5	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	

1

(1) $A_n=0,1,2$ のいずれかである。

1回目は必ず $A_1=1$ となるので　$p_1=0,\ q_1=1$ …(答)

$A_1=1$ から2回目 $A_2=2$ となるのは

ZWのどちらかの玉をXYのあいている箱に入れるときで

確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

同様にして $A_2=0$ となる確率も $\frac{1}{4}$　$\therefore p_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore q_2=1-p_2=\frac{1}{2}$　　$p_2=\frac{1}{2},\ q_2=\frac{1}{2}$ …(答)

(2) (1)と同様に n回目と$n+1$回目の関係は下図

$\left\{\begin{array}{l}A_n=2\\ A_n=0\end{array}\right. \longrightarrow A_{n+1}=1$　確率 1 …①

$A_n=1 \longrightarrow A_{n+1}=2$　となる確率は $\frac{1}{4}$ …②

$A_n=1 \longrightarrow A_{n+1}=0$　となる確率は $\frac{1}{4}$ …③

$A_n=1 \longrightarrow A_{n+1}=1$　となる確率は $\frac{1}{2}$ …④

②③から　$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n$　　①④から　$q_{n+1}=p_n+\frac{1}{2}q_n$ …(答)

(3) (2)から　$q_{n+2}=p_{n+1}+\frac{1}{2}q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}q_{n+1}$ …⑤

⑤は　$q_{n+2}-q_{n+1}=-\frac{1}{2}(q_{n+1}-q_n)$　と変形できるので

$\therefore q_{n+1}-q_n=(q_2-q_1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ …⑥

また⑤　$q_{n+2}+\frac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n$　と変形できるので

$q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n=q_n+\frac{1}{2}q_{n-1}=\cdots=q_2+\frac{1}{2}q_1=1$ …⑦

⑥⑦より　$q_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ …(答)

受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $y=mx+n$ を $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ に代入した $x^2+\frac{1}{4}(mx+n)^2=1$

つまり $(m^2+4)x^2+2mnx+(n^2-4)=0$

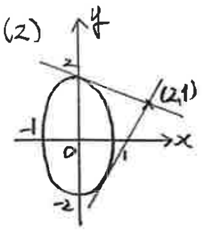
これが重解をもてばよいので 判別式 $D=0$

$$\frac{D}{4}=(mn)^2-(m^2+4)(n^2-4)$$

$$=4m^2-4n^2+16$$

よって $m^2-n^2+4=0$ ...(答)

(2)



図より、$x=2$ は接線にならないので 接線を $y=m(x-2)+1$ とおくと

$y=mx-2m+1$ となるので

(1)を用いて

$$m^2-(-2m+1)^2+4=0$$

$$-3m^2+4m+3=0$$

この解を α,β とすると、α,β が2つの接線の傾きであるが

解と係数の関係から $\alpha\beta=\frac{3}{-3}=-1$ であるから

2つの接線は直交する (証明終)

(3) 2つの接線の交点を (p,q) とする。(ただし $p\neq\pm1$)

$p\neq\pm1$ なので 接線の方程式は $y=m(x-p)+q$ つまり $y=mx-mp+q$ なので

(1)より $m^2-(-mp+q)^2+4=0$

$$(1-p^2)m^2+2pqm+(4-q^2)=0$$

$p\neq\pm1$ だから これは m についての2次方程式で この2つの解が2つの接線の傾き α,β である。

解と係数の関係から $\alpha\beta=\frac{4-q^2}{1-p^2}$ で 2つの接線が直交するので $\alpha\beta=-1$

したがって $\frac{4-q^2}{1-p^2}=-1$

よって $p^2+q^2=5$

また、$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の接線 $x=1$ と直交する接線は $y=2$ と $y=-2$ で 交点は $(1,2)$、$(1,-2)$

同様、接線 $x=-1$ のときは 交点は $(-1,2)$、$(-1,-2)$ となり、この4点はいずれも

$p^2+q^2=5$ をみたす。

以上から 求める軌跡は 円 $x^2+y^2=5$ ....(答)

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

(1) $A+B+C=\pi$ より $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=\underline{\underline{-\tan A}}$ …(答)

(2) $A+A+A<A+B+C$ より

$3A<\pi$

$0<A<\frac{\pi}{3}$

$0<\tan A<\sqrt{3}$，$\tan A$は整数なので $\tan A=1$ から $A=\frac{\pi}{4}$

$A+B+C=\pi$ から $C=\pi-(A+B)=\frac{3}{4}\pi-B$

$B>A=\frac{\pi}{4}$ より $C<\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(証明終了)

(3) (1)と $\tan A=1$ より

$\tan(B+C)=-1$

$$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1$$

$\tan B\tan C-1=\tan B+\tan C$

$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$

$0<B<C<\frac{\pi}{2}$ より $\tan B<\tan C$，$\tan B-1$，$\tan C-1$は整数から

$(\tan B-1, \tan C-1)=(1, 2)$

$(\tan B, \tan C)=(2, 3)$

以上より $\underline{\underline{\tan A=1,\ \tan B=2,\ \tan C=3}}$ …(答)

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

5

(1) $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

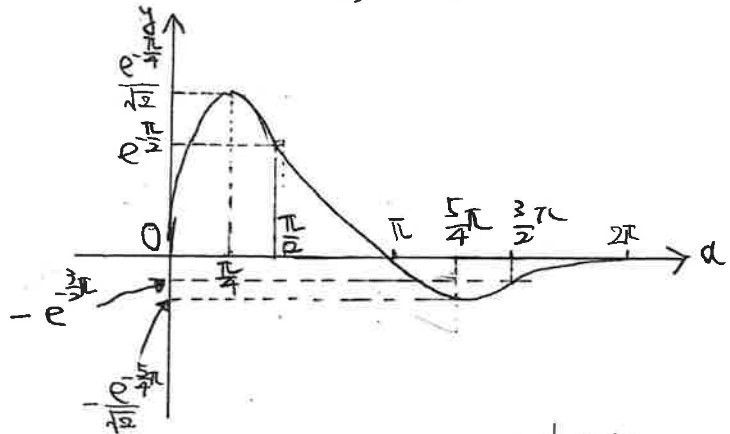
$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	$\frac{-e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\frac{3}{2}\pi}$	↗	0

極大値：$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，極小値：$\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$ …(答)

変曲点：$\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$，$\left(\frac{3}{2}\pi, -e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$ …(答)

グラフは次のようになる



(2) $x-(n-1)\pi = t$ とおくと

x	$(n-1)\pi \to n\pi$
t	$0 \to \pi$

$\frac{dt}{dx} = 1$

$$(与式) = \int_0^{\pi} \left| e^{-t-(n-1)\pi}\sin(t+(n-1)\pi)\right| dt$$

$$= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}\left|e^{-t}\sin t\right| dt = e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\, dt$$

$(e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$ …①

$(e^{-t}\cos t)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$ …②

①＋② より $e^{-t}\sin t = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)$

$\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\, dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$ より

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f(x)|\, dx = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}$ …(答)

(3) 初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$，公比 $e^{\pi}<1$ の無限等比級数より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}|f(x)|\,dx = \frac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}{1-e^{\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$ …(答)