数理

受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

採点欄

2

m；整数

$y = x^2 - 4(m-3)x + 1 = \{x - 2(m-3)\}^2 - 4(m-3)^2 + 1$

頂点は $P_m(2(m-3), -4(m-3)^2+1)$

(1) mはサイコロの目の数より $1 \leqq m \leqq 6$ (mは整数)

P_mが $x>0$ かつ $y<0$ の範囲にあるから

$2(m-3)>0$ かつ $-4(m-3)^2+1<0$

$\therefore\ m>3$ かつ $\left(m<\frac{5}{2}, \frac{7}{2}<m\right)$

$\therefore\ m>\frac{7}{2}$

これを満たすmは $m=4, 5, 6$

よって求める確率は $\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ …(答)

(2) 1枚の硬貨を6回投げたときの表の出る回数がmより

$0 \leqq m \leqq 6$ (mは整数)

P_mが $x<0$ かつ $y<0$ の範囲にあるから

$2(m-3)<0$ かつ $-4(m-3)^2+1<0$

$\therefore\ m<3$ かつ $\left(m<\frac{5}{2}, \frac{7}{2}<m\right)$

$\therefore\ m<\frac{5}{2}$

これを満たすmは $m=0, 1, 2$

よって求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{15}{2^6}$$

$$= \underline{\underline{\frac{11}{32}}} \cdots (\text{答})$$

数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $y=mx+n$ を $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ に代入した $x^2+\frac{1}{4}(mx+n)^2=1$

つまり $(m^2+4)x^2+2mnx+(n^2-4)=0$

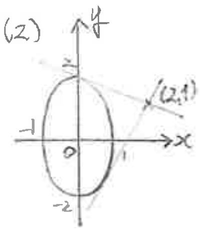
これが重解をもてばよいので 判別式 $D=0$

$\frac{D}{4}=(mn)^2-(m^2+4)(n^2-4)$

$=4m^2-4n^2+16$

よって $m^2-n^2+4=0$ ...(答)

(2)



図より $x=2$ は接線にならないので 接線を $y=m(x-2)+1$ とおくと

$y=mx-2m+1$ となるので

(1)を用いて

$m^2-(-2m+1)^2+4=0$

$-3m^2+4m+3=0$

この解を α, β とすると α, β が2つの接線の傾きであるが

解と係数の関係から $\alpha\beta=\frac{3}{-3}=-1$ であるから

2つの接線は直交する (証明終)

(3) 2つの接線の交点を (p, q) とする。(ただし $p \neq \pm 1$)

$p \neq \pm 1$ なので 接線の方程式は $y=m(x-p)+q$ つまり $y=mx-mp+q$ なので

(1)より $m^2-(-mp+q)^2+4=0$

$(1-p^2)m^2+2pqm+(4-q^2)=0$

$p \neq \pm 1$ だから これは m についての2次方程式で この2つの解が2つの接線の傾き α, β である。

解と係数の関係から $\alpha\beta=\frac{4-q^2}{1-p^2}$ で 2つの接線が直交するので $\alpha\beta=-1$

したがって $\frac{4-q^2}{1-p^2}=-1$

よって $p^2+q^2=5$

また $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の接線 $x=1$ と直交する接線は $y=2$ と $y=-2$ で 交点は $(1, 2)$、$(1, -2)$

同様、接線 $x=-1$ のときは 交点は $(-1, 2)$、$(-1, -2)$ となり、この4点はいずれも

$p^2+q^2=5$ をみたす。

以上から 求める軌跡は 円 $x^2+y^2=5$ ....(答)

数理

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

4

(1) $A+B+C=\pi$ より $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=\underline{\underline{-\tan A}}$ …(答)

(2) $A+A+A<A+B+C$ より

$3A<\pi$

$0<A<\frac{\pi}{3}$

$0<\tan A<\sqrt{3}$，$\tan A$は整数なので $\tan A=1$ から $A=\frac{\pi}{4}$

$A+B+C=\pi$ から $C=\pi-(A+B)=\frac{3}{4}\pi-B$

$B>A=\frac{\pi}{4}$ より　$C<\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　(証明終了)

(3) (1)と $\tan A=1$ より

$\tan(B+C)=-1$

$$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1$$

$\tan B\tan C-1=\tan B+\tan C$

$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$

$0<B<C<\frac{\pi}{2}$ より　$\tan B<\tan C$，$\tan B-1$，$\tan C-1$は整数から

$(\tan B-1,\tan C-1)=(1,2)$

$(\tan B,\tan C)=(2,3)$

以上より　$\underline{\underline{\tan A=1,\ \tan B=2,\ \tan C=3}}$ …(答)

受験番号

1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

5

(1) $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

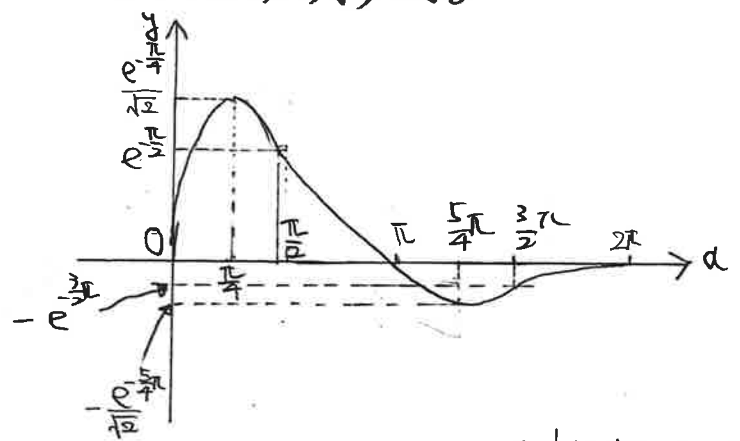
$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	$-\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\frac{3}{2}\pi}$	↗	0

極大値：$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，極小値：$\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$ …(答)

変曲点：$\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$，$\left(\frac{3}{2}\pi, -e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$ …(答)

グラフは次のようになる



(2) $x-(n-1)\pi = t$ とおくと

x	$(n-1)\pi \to n\pi$
t	$0 \to \pi$

$\frac{dt}{dx} = 1$

$(与式) = \int_0^{\pi} |e^{-t-(n-1)\pi}\sin(t+(n-1)\pi)|\,dt$

$= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}|e^{-t}\sin t|\,dt = e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$

$(e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$ …①

$(e^{-t}\cos t)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$ …②

①＋②より　$e^{-t}\sin t = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)'$

$\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$ より

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f(x)|\,dx = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}$ …(答)

(3) 初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$，公比 $e^{\pi}<1$ の無限等比級数より

$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}|f(x)|\,dx = \frac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}{1-e^{\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$ …(答)