受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部医学科
総合理工学部数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	

1

(1) (証明) nが3で割って1余る自然数なので $n=3k+1$ (kは0以上の整数) とおける。

このとき $1+n+n^2=1+(3k+1)+(3k+1)^2$

$=1+(3k+1)+(9k^2+6k+1)$

$=3(3k^2+3k+1)$

kは0以上の整数なので $3k^2+3k+1$も整数だから $1+n+n^2$は3の倍数である。(証明終)

(2) (証明)(i) $n=3k$ (kは自然数) のとき つまり nが3の倍数だから、$n(n+1)(1+n+n^2)$は3の倍数である。

(ii) $n=3k+1$ (kは0以上の整数) のとき、(1)より $1+n+n^2$が3の倍数なので

$n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3の倍数である。

(iii) $n=3k+2$ (kは0以上の整数) のとき、$n+1=(3k+2)+1=3(k+1)$ だから $n+1$は3の倍数

であるから、$n(n+1)(1+n+n^2)$は3の倍数である。

(i)(ii)(iii)より

すべての自然数nに対して $n(n+1)(1+n+n^2)$は3の倍数である。(証明終)

(3) (証明) (i) nが$k+2$の倍数のときは $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$ は$k+2$の

倍数である。

(ii) nが$k+2$で割ってl ($2\leqq l\leqq k+1$) 余るとき $n=(k+2)M+l$ (Mは0以上の整数) とおけ

このとき $1\leqq k+2-l\leqq k$ で

$n+(k+2-l)=(k+2)M+l+(k+2-l)=(k+2)(M+1)$ だから

$n+(k+2-l)$が$k+2$の倍数.

したがって $n(n+1)(n+2)\cdots\{n+(k+2-l)\}\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$は$k+2$の倍数である。

(iii) nが$k+2$で割って1余るとき $n=(k+2)M+1$ (Mは0以上の整数) とおけ

n^L (Lは自然数で $1\leqq L\leqq k+1$) について

二項定理を用いると

$n^L=\{(k+2)M+1\}^L={}_LC_0(k+2)^LM^L+{}_LC_1(k+2)^{L-1}M^{L-1}+\cdots+{}_LC_{L-1}(k+2)M+1$

$=(k+2)\{{}_LC_0(k+2)^{L-1}M^L+{}_LC_1(k+2)^{L-2}M^{L-1}+\cdots+{}_LC_{L-1}M\}+1$

であるから n^L ($1\leqq L\leqq k+1$) は$k+2$で割ると1余る。

$n^L=(k+2)M_L+1$ (M_Lは0以上の整数) とおくと

$1+n+n^2+n^3+\cdots+n^{k+1}=1+\{(k+2)M_1+1\}+\{(k+2)M_2+1\}+\cdots+\{(k+2)M_{k+1}+1\}$

$=(k+2)(M_1+M_2+\cdots+M_{k+1})+(k+2)$

$=(k+2)(M_1+M_2+\cdots+M_{k+1}+1)$ となるので

$1+n+n^2+\cdots+n^{k+1}$は$k+2$の倍数

よって $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$の倍数である。(証明終)

(i)(ii)(iii)より すべての自然数 n, kに対して $k+2$の倍数 である。

数理・医

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄　2

$C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = y(t), \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \pi x}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

(1) $t = \frac{\pi}{4}$ のとき, $x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ だから, 求める傾きは,

$$\frac{dy}{dx}\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}\pi} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{\pi} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - 1}} \quad \cdots (答)$$

(2) $x = \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \cos t$

このとき, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2 - \pi x}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \cdot \cos t = \frac{2 - \pi\sin t}{\pi\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cdot \cos t \quad (\because x = \sin t)$

$= \frac{2 - \pi\sin t}{\pi\cos t} \cdot \cos t = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} - \sin t}} \quad \cdots (答) \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} より \cos t > 0\right)$

(3) $y(t) = \int \frac{dy}{dt} dt = \int \left(\frac{2}{\pi} - \sin t\right) dt = \frac{2}{\pi}t + \cos t + C$ （Cは積分定数）

このとき, $y(0) = 1 + C = 0 \quad \therefore C = -1$

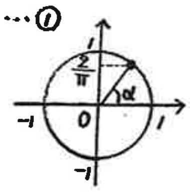
となり, $y(t) = \frac{2}{\pi}t + \cos t - 1$

ここで, $t = \frac{\pi}{2}$ のとき, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = 0$ となり, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ を満たす.

よって, $\underline{\underline{y(t) = \frac{2}{\pi}t + \cos t - 1}} \quad \cdots (答)$

(4) $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi} - \sin t$ となり $\frac{dy}{dt} = 0$ とすると, $\sin t = \frac{2}{\pi} \quad \cdots ①$

①を満たすxの値をαとすると $\sin\alpha = \frac{2}{\pi} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$



このとき, x, yの増減表は,

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$			$+$		0
x	0		$\longrightarrow$		1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	0
(x, y)	(0.0)	$\nearrow$		$\searrow$	(1.0)

この表から, 求める面積をSとすると,

$$S = \int_0^1 y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}t + \cos t - 1\right) \cdot \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}t\cos t + \cos^2 t - \cos t\right) dt$$

ここで,

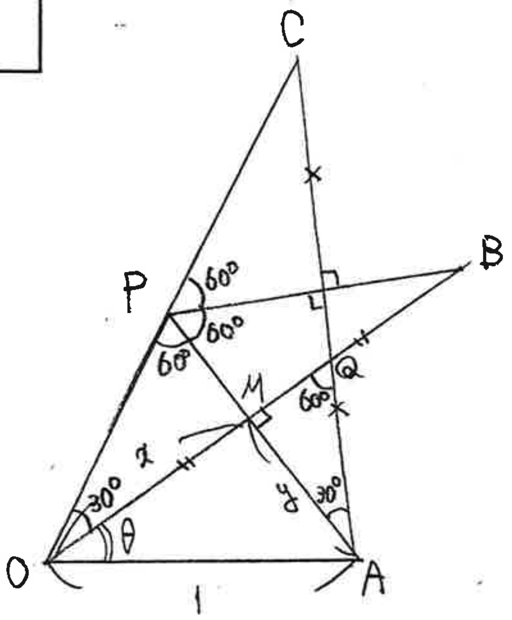
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{\pi}{2} + \left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

したがって,

$$S = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{4} - 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}}} \quad \cdots (答)$$

数学　解答用紙

採点欄　3



(1) 図形が折り返されているので

$\angle APO = \angle APB = 60°$

$\angle APB = \angle CPB = 60°$ なので

$\angle OPC = \angle APO + \angle APB + \angle CPB = 180°$ より

3点 O, P, C は一直線上にある。

(2) 図より

$OP : OM = 2 : \sqrt{3}$ より

$OP = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x}}$ …(答)

$PM : OM = 1 : \sqrt{3}$ より

$PM = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので

$AP = PM + AM = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + y}}$ …(答)

$QM : AM = 1 : \sqrt{3}$ より

$QM = \dfrac{y}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y$ なので

$BQ = BM - QM = \underline{\underline{x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}y}}$ …(答)

(3) △OAMにおいて、

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ である。

図形が折り返されているから $PC = PA$

$OC = OP + PC = OP + PA$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + y\right)$

$= \sqrt{3}x + y$

$= \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$

$OC = 2\sin(\theta + 60°)$

ここで、△OAMは直角三角形なので

$0° < \theta < 90°$ だから

$60° < \theta + 60° < 150°$ ゆえに

OCは $\theta + 60° = 90°$ のときに

最大値 2 をとる。

以上より

$\underline{\underline{\text{OCは } \theta = 30° \text{ のとき最大となる。}}}$ …(答)

数 学　解 答 用 紙

採点欄　4

大小2つのコインを同時に1回投げた時

一致さが起こるのは $\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$ これを○で表す。

一致が起こらないのは $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ これを×で表す。

(1) 4回目 連続して一致が起こった最大の回数が2となるのは

○○×○，○○××，×○○×，××○○，○×○○ の5通り

各確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ より $p(4,2)=\frac{5}{16}$ …(答)

(2) 次の3つの場合に分けて考える。○、×どちらでも良い場合を△で表す

(i) はじめのk回が○のとき

$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k}\times\underbrace{\triangle\triangle\cdots\triangle}_{k-1}$

(ii) 最後のk回が○のとき

$\underbrace{\triangle\triangle\cdots\triangle}_{k-1}\times\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k}$　2^{k-1}通り

(iii) はじめにl回△，l+1回目×，その後k回○ $(l=0,1,\cdots,k-2)$

$\underbrace{\triangle\triangle}_{l}\times\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k}\times\underbrace{\triangle\triangle\cdots\triangle}_{k-2-l}$　$2^l\times2^{k-2-l}\times(k-1)$

$=(k-1)2^{k-2}$

$\therefore p(2k,k)=\left\{2^{k-1}+2^{k-1}+(k-1)\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{k+3}{2^{k+2}}$ …(答)

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}p(2k,k)=\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{6}{2^5}+\cdots+\frac{n+3}{2^{n+2}}$ とおくと

$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2^3}+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{n+2}}\right)-\frac{n+3}{2^{n+3}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+3}{2^{n+3}}=\frac{5}{8}-\frac{n+5}{2^{n+3}}$

$\therefore S_n=\frac{5}{4}-\frac{n+5}{2^{n+2}}$　$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{2^{n+2}}=0$ より

$\sum_{k=1}^{\infty}p(2k,k)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{4}$ …(答)