受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

〔物理・マテリアル工学科，物質化学科
地球科学科，知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科，建築デザイン学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) x, y が整数であるとすると、$6x$ と $2y$ は2の倍数である。
よって $6x+2y$ も2の倍数となる。
ところで1は2の倍数でないから $6x+2y$ は1と等しくない
よって不定方程式 $6x+2y=1$ は整数解をもたない。

(2) $43 = 24\cdot1+19$ より $43-24=19$ ---㋐
$24=19\cdot1+5$ より $24-19=5$ ---㋑
$19=5\cdot3+4$ より $19-5\cdot3=4$ ---㋒
$5=4\cdot1+1$ より $5-4=1$ ---㋓

㋒を㋓に代入して $5-(19-5\cdot3)=4$, $-19+5\cdot4=1$
㋑を代入して $-19+(24-19)\cdot4=1$, $-19\cdot5+24\cdot4=1$
㋐を代入して $-(43-24)\cdot5+24\cdot4=1$, $43\cdot(-5)+24\cdot9=1$
辺々2倍して $43\cdot(-10)+24\cdot18=2$
よって $43x+24y=2$ の整数解の一組は
$(x, y)=(-10, 18)$ ----(答)

(3) $43x+24y=2$ ---①
$43\cdot(-10)+24\cdot18=2$ ---②
①−②より $43(x+10)+24(y-18)=0$ ∴ $43(x+10)=24(18-y)$
43と24は互いに素であるから、①を満たす整数 x, y の組は
$\begin{cases} x+10=24n \\ 18-y=43n \end{cases}$ (nは整数)と表せる。∴ $\begin{cases} x=24n-10 \\ y=-43n+18 \end{cases}$
このとき $|x|\leqq30$ より $-30\leqq x\leqq30$
$-30\leqq24n-10\leqq30$ ∴ $-\frac{5}{6}\leqq n\leqq\frac{5}{3}$ ----③
$|y|\leqq30$ より $-30\leqq y\leqq30$
$-30\leqq-43n+18\leqq30$ ∴ $-\frac{12}{43}\leqq n\leqq\frac{48}{43}$ ---④
③, ④より $-\frac{12}{43}\leqq n\leqq\frac{48}{43}$
nは整数だから $n=0, 1$
よって、条件を満たす整数 x, y の組は
$(x, y)=(-10, 18), (14, -25)$ ---(答)

数学　解答用紙

採点欄 | 2

$C:\begin{cases} x=\sin t \\ y=y(t), \quad y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-\pi x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

(1) $t=\frac{\pi}{4}$ のとき，$x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから，求める傾きは，

$$\frac{dy}{dx}\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}\pi}=\frac{2\sqrt{2}-\pi}{\pi}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}-1}} \quad \cdots(答)$$

(2) $x=\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=\cos t$

このとき，$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2-\pi x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\cdot\cos t=\frac{2-\pi\sin t}{\pi\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t \quad (\because x=\sin t)$

$=\frac{2-\pi\sin t}{\pi\cos t}\cdot\cos t=\underline{\underline{\frac{2}{\pi}-\sin t}} \quad \cdots(答) \quad \left(\because 0<t<\frac{\pi}{2} より \cos t>0\right)$

(3) $y(t)=\int\frac{dy}{dt}dt=\int\left(\frac{2}{\pi}-\sin t\right)dt=\frac{2}{\pi}t+\cos t+C$ （Cは積分定数）

このとき，$y(0)=1+C=0 \quad \therefore C=-1$

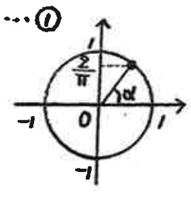
となり，$y(t)=\frac{2}{\pi}t+\cos t-1$

ここで，$t=\frac{\pi}{2}$ のとき，$y(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+0-1=0$ となり，$y(\frac{\pi}{2})=0$ を満たす。

よって，$\underline{\underline{y(t)=\frac{2}{\pi}t+\cos t-1}} \quad \cdots(答)$

(4) $\frac{dx}{dt}=\cos t$，$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{\pi}-\sin t$ となり $\frac{dy}{dt}=0$ とすると，$\sin t=\frac{2}{\pi} \cdots①$

①を満たす x の値を α とすると $\sin\alpha=\frac{2}{\pi} \ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$



このとき，x, y の増減表は，

t	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$			+		0
x	0		$\longrightarrow$		1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	−	
y	0	↑	極大	↓	0
(x,y)	(0,0)	↗		↘	(1,0)

この表から，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}t+\cos t-1\right)\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}t\cos t+\cos^2 t-\cos t\right)dt$$

ここで，

・$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=\left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}+\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

・$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

・$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

したがって，

$$S=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{4}-1=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}}} \quad \cdots(答)$$

物理

受験番号					
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

3

(1) A(1, 0, 0), B(0, 0, 1) なので $|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=1$ ・・・①

$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OQ}$ はどちらも大きさが $\frac{1}{2}$ なので $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}$ ・・・②

x軸の正の向きとなす角が 45°, z軸の正の向きとなす角が 120° だから

$\angle POA=45°, \angle POB=120°$ ・・・③

①, ②, ③より $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle POA=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ・・・(答)

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle POB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ ・・・(答)

(2) P(x, y, z) とおくと (1)より

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=x\cdot 1+y\cdot 0+z\cdot 0=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ・・・④

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 1=-\frac{1}{4}$ $\therefore z=-\frac{1}{4}$ ・・・⑤

また②より $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$ だから④, ⑤を代入して $y=\pm\frac{1}{4}$

Pのy座標は正、Qのy座標は負なので

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$　$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ ・・・(答)

(3) (2)より $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$ だから $|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}$ ・・・⑥

②, ⑥より △OPQは正三角形 だから正弦定理より

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R \quad (R：外接円の半径)$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \quad より \quad R=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

したがって△OPQの外接円の面積は

$$\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{12} \quad \cdots (答)$$