数学　解答用紙

物理・マテリアル工学科，物質化学科
地球科学科，知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科，建築デザイン学科

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) x, y が整数であるとすると、$6x$ と $2y$ は 2 の倍数である。
よって $6x+2y$ も 2 の倍数となる。
ところで 1 は 2 の倍数でないから $6x+2y$ は 1 と等しくない
よって不定方程式 $6x+2y=1$ は整数解をもたない。

(2) $43 = 24\cdot1+19$ より $43-24=19$ ---㋐
$24 = 19\cdot1+5$ より $24-19=5$ ---㋑
$19 = 5\cdot3+4$ より $19-5\cdot3=4$ ---㋒
$5 = 4\cdot1+1$ より $5-4=1$ ---㋓

㋒を㋓に代入して $5-(19-5\cdot3)=4$，$-19+5\cdot4=1$
㋑を代入して $-19+(24-19)\cdot4=1$，$-19\cdot5+24\cdot4=1$
㋐を代入して $-(43-24)\cdot5+24\cdot4=1$，$43\cdot(-5)+24\cdot9=1$
辺々2倍して $43\cdot(-10)+24\cdot18=2$
よって $43x+24y=2$ の整数解の一組は
$(x, y)=(-10, 18)$ ---- (答)

(3) $43x+24y=2$ ---①
$43\cdot(-10)+24\cdot18=2$ ---②
① − ② より $43(x+10)+24(y-18)=0$ ∴ $43(x+10)=24(18-y)$
43と24は互いに素であるから、①を満たす整数 x, y の組は

$\begin{cases} x+10=24n \\ 18-y=43n \end{cases}$ (n は整数) と表せる。∴ $\begin{cases} x=24n-10 \\ y=-43n+18 \end{cases}$

このとき $|x|\leqq30$ より $-30\leqq x\leqq30$
$-30\leqq24n-10\leqq30$ ∴ $-\frac{5}{6}\leqq n\leqq\frac{5}{3}$ ----③
$|y|\leqq30$ より $-30\leqq y\leqq30$
$-30\leqq-43n+18\leqq30$ ∴ $-\frac{12}{43}\leqq n\leqq\frac{48}{43}$ ---④
③, ④より $-\frac{12}{43}\leqq n\leqq\frac{48}{43}$
n は整数だから $n=0, 1$
よって、条件を満たす整数 x, y の組は
$(x, y)=(-10, 18), (14, -25)$ --- (答)

数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ なので $|\vec{OA}|=1$, $|\vec{OB}|=1$ …①

$\vec{OP}$と$\vec{OQ}$ はどちらも大きさが $\frac{1}{2}$ なので $|\vec{OP}|=|\vec{OQ}|=\frac{1}{2}$ …②

x軸の正の向きとなす角が $45°$, z軸の正の向きとなす角が $120°$ だから

$\angle POA=45°$, $\angle POB=120°$ …③

①,②,③より $\vec{OP}\cdot\vec{OA}=|\vec{OP}||\vec{OA}|\cos\angle POA=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ …(答)

$\vec{OP}\cdot\vec{OB}=|\vec{OP}||\vec{OB}|\cos\angle POB=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ …(答)

(2) $P(x,y,z)$とおくと (1)より

$\vec{OP}\cdot\vec{OA}=x\cdot1+y\cdot0+z\cdot0=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 　∴ $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ …④

$\vec{OP}\cdot\vec{OB}=x\cdot0+y\cdot0+z\cdot1=-\frac{1}{4}$ 　∴ $z=-\frac{1}{4}$ …⑤

また②より $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$ だから④,⑤を代入して　$y=\pm\frac{1}{4}$

Pのy座標は正、Qのy座標は負なので

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$　$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ …(答)

(3) (2)より $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$ だから $|\vec{PQ}|=\frac{1}{2}$ …⑥

②,⑥より △OPQは正三角形 だから正弦定理より

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R \quad (R:外接円の半径)$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \quad より \quad R=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

したがって△OPQの外接円の面積は

$$\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{12} \quad …(答)$$

教育、生物

受験番号					
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

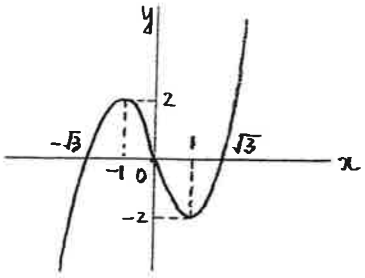
3

(1) $f(x)=x^3-3x$ より $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

増減については表の通り

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

増減表よりグラフは右のようになる。



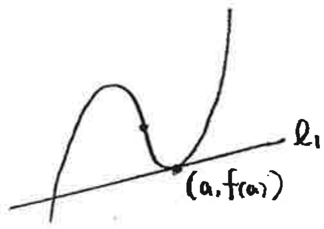
(2) l_1 は $y-(a^3-3a)=(3a^2-3)(x-a)$ より $y=3(a^2-1)x-2a^3 \cdots$(答)

これと $y=f(x)$ を連立して $x^3-3x=3(a^2-1)x-2a^3$ を解くと

$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$(x-a)^2(x+2a)=0 \text{ より } x=a,\ -2a$$

$a>0$ より



$$S_1(a)=\int_{-2a}^{a}\left\{(x^3-3x)-(3(a^2-1)x-2a^3)\right\}dx$$

$$=\int_{-2a}^{a}(x-a)^2(x+2a)\,dx$$

$$=\int_{-2a}^{a}(x-a)^3dx+3a\int_{-2a}^{a}(x-a)^2dx=\left[\frac{1}{4}(x-a)^4\right]_{-2a}^{a}+a\left[(x-a)^3\right]_{-2a}^{a}=\frac{27}{4}a^4 \cdots \text{(答)}$$

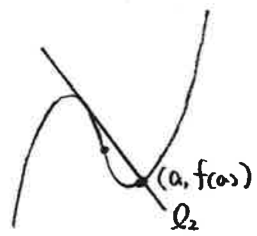
(3) $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ $(t\neq a)$ における接線は(2)と同様にして

$y=3(t^2-1)x-2t^3 \cdots$① と書けこれと $y=f(x)$ との共有点の x 座標は

$x=t$ 以外のものは $x=-2t$ なので、①が $(a, f(a))$ を通るとき $-2t=a$ つまり $t=-\frac{a}{2}$

よって $t=-\frac{a}{2}$ を①に代入して l_2 の方程式は $y=3\left(\frac{a^2}{4}-1\right)x+\frac{a^3}{4} \cdots$(答)

$a>0$ より



$$S_2(a)=\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left\{3\left(\frac{a^2}{4}-1\right)x+\frac{a^3}{4}-(x^3-3x)\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)^2(x-a)\,dx$$

$$=-\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)^3dx+\frac{3}{2}a\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)^2dx=-\frac{1}{4}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^4\right]_{-\frac{a}{2}}^{a}+\frac{a}{2}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{a}=\frac{27}{64}a^4$$

よって $\dfrac{S_1(a)}{S_2(a)}=\dfrac{\frac{27}{4}a^4}{\frac{27}{64}a^4}=16 \cdots$(答)