志望学部	受験番号
医(医)学部	番

数学　平成30年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

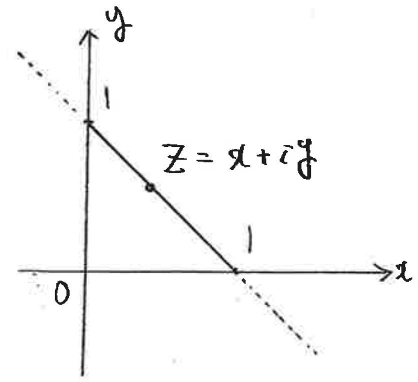
〔Ⅰ〕

$z=\frac{1}{w}$ より　$x+iy=\frac{1}{u+iv}$

$$x+iy=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

x,y,u,v は実数だから $\frac{u}{u^2+v^2}$, $\frac{v}{u^2+v^2}$ も実数なので

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$



$x+y=1\quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

(1) より

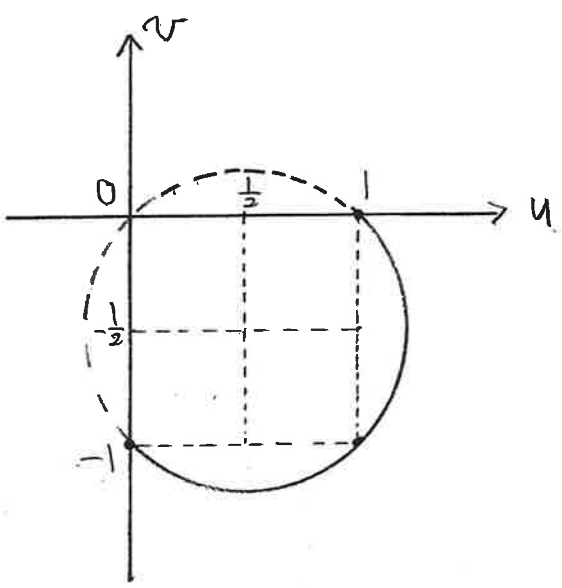
$$\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{(-v)}{u^2+v^2}=1$$

$\times(u^2+v^2)$

$$u-v=u^2+v^2$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

また，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より $u\geqq 0$，$v\leqq 0$



求める図形は左図の実線部分

ただし，$(u,v)\neq(0,0)$ とする。

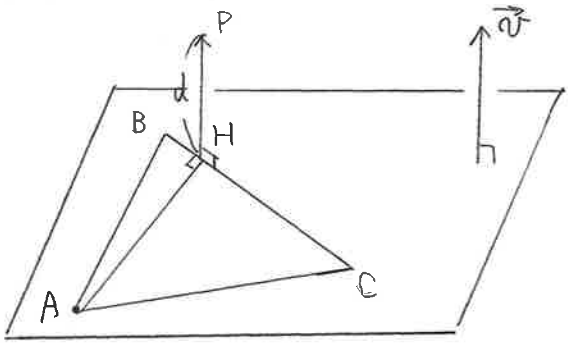
得点	

志望学部	受験番号
医(医) 工・生命・保　学部 地域・農	番

数　学　　　平成30年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔II〕



(1) $\overrightarrow{BC}=(-4,4,8)\,/\!/\,(-1,1,2)=\vec{\ell}$ とおく

3点 B, H, C は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{BH}=k\vec{\ell}$ (k:実数) とおくことができる

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+k\vec{\ell}=(3,-3,-5)+k(-1,1,2)$

$\overrightarrow{OH}=(3-k,\ -3+k,\ -5+2k)$ …(*)

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(6-k,\ k,\ -6+2k)$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{\ell}$ より $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{\ell}=0$ だから

$$-6+k+k+4k-12=0$$
$$6k=18$$
$$k=3$$

(*)より $\overrightarrow{OH}=(0,0,1)$

したがって, $\underline{H(0,0,1)}$ …(答)

(2) $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(6,0,-6)\,/\!/\,(1,0,-1)=\vec{n_1}\\ \overrightarrow{AC}=(2,4,2)\,/\!/\,(1,2,1)=\vec{n_2}\end{cases}$ とすると

$\vec{n_1}\perp\vec{v}$ より $\vec{n_1}\cdot\vec{v}=0$ だから

$$v_1-v_3=0$$
$$v_3=v_1$$

$\vec{n_2}\perp\vec{v}$ より $\vec{n_2}\cdot\vec{v}=0$ だから

$$v_1+2v_2+v_3=0$$

$v_3=v_1$ より $2v_2=-2v_1$

$$v_2=-v_1$$

したがって, $\vec{v}=(v_1,\ -v_1,\ v_1)$

$|\vec{v}|=1$ より $v_1^2+v_1^2+v_1^2=1$

$$v_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$v_1>0$ より $\underline{\underline{\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{BC}=(-4,4,8)=4(-1,1,2)$

$|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{1+1+4}=4\sqrt{6}$ より

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times2=\underline{\underline{4\sqrt{6}}}$ …(答)

(4) $S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times d=2\sqrt{6}\,d$ …①

$|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{1+0+1}=6\sqrt{2}$ より $|\overrightarrow{AB}|^2=72$ から

$|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=72$

ここで, 三平方の定理より

$|\overrightarrow{PA}|^2=18+d^2$, $|\overrightarrow{PB}|^2=54+d^2$ を用いると

$$(18+d^2)+(54+d^2)-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=72$$
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=d^2$$

したがって,

$T=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PB}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(18+d^2)(54+d^2)-d^4}$ …②

$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{1+4+1}=2\sqrt{6}$ より $|\overrightarrow{AC}|^2=24$ から

$|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2-2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=24$

ここで, 三平方の定理より $|\overrightarrow{PC}|^2=6+d^2$ より

$$(6+d^2)+(18+d^2)-2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=24$$
$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=d^2$$

したがって,

$U=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PC}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(18+d^2)(6+d^2)-d^4}$ …③

$S^2=T^2-U^2$ に①, ②, ③を代入して

$$24d^2=\frac{1}{4}\{(18+d^2)(54+d^2)-d^4\}-\frac{1}{4}\{(18+d^2)(6+d^2)-d^4\}$$
$$96d^2=(18+d^2)\times48$$

÷48

$$2d^2=18+d^2$$
$$d^2=18$$

$d>0$ より $\underline{\underline{d=3\sqrt{2}}}$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医(医)学部	番

数　学　　平成30年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔III〕

(1) $y=f(x)=x^{2n+1}e^{-x^2}$ とおくと

$f(-x)=-f(x)$ なので奇関数である

$f'(x)=(2n+1)x^{2n}e^{-x^2}+x^{2n+1}\times e^{-x^2}\times(-2x)$

$=x^{2n}e^{-x^2}\{(2n+1)-2x^2\}$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ \pm\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

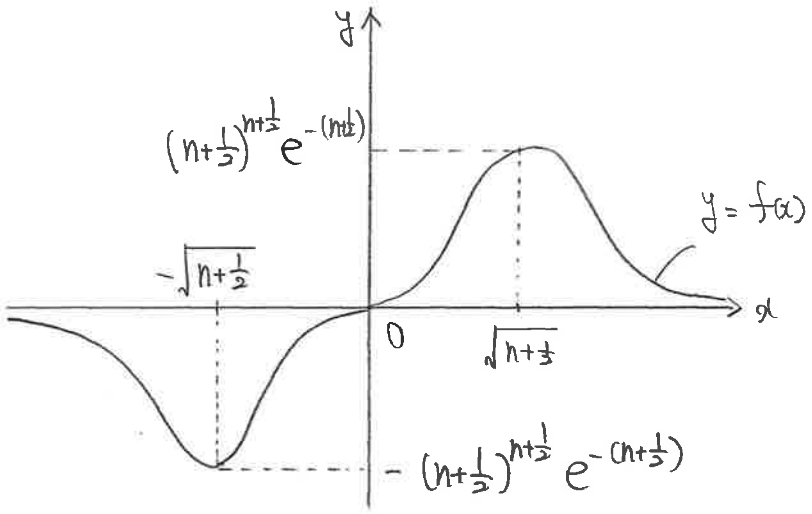
このとき，$x\geqq 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{n+\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$f\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+\frac{1}{2})}$

グラフは，次のようになる



したがって，

(答) $\begin{cases}\text{極大値}:\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+\frac{1}{2})} & \left(x=\sqrt{n+\frac{1}{2}}\ \text{のとき}\right)\\ \text{極小値}:-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+\frac{1}{2})} & \left(x=-\sqrt{n+\frac{1}{2}}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$

(2) $I_0=\lim_{r\to\infty}\int_0^r xe^{-x^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_0^r$

$=-\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}(e^{-r^2}-1)$

$I_0=\frac{1}{2}$ …(答)

$I_1=\lim_{r\to\infty}\int_0^r x^3e^{-x^2}dx$

ここで $\int_0^r x^3e^{-x^2}dx=\int_0^r x^2\times xe^{-x^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^r x^2(e^{-x^2})'dx$

$=-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-x^2}\right]_0^r+\frac{1}{2}\int_0^r 2xe^{-x^2}dx$

$=-\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^r$

$=-\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}-\frac{1}{2}(e^{-r^2}-1)$ より

したがって，$I_1=\lim_{r\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}-\frac{1}{2}(e^{-r^2}-1)\right\}=\frac{1}{2}$ …(答)

(3) $n\geqq 1$ のとき，

$I_n=\lim_{r\to\infty}\int_0^r x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

ここで $\int_0^r x^{2n+1}e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^r x^{2n}\times(e^{-x^2})'dx$

$=-\frac{1}{2}\left[x^{2n}e^{-x^2}\right]_0^r+\frac{1}{2}\int_0^r 2nx^{2n-1}e^{-x^2}dx$

$=-\frac{1}{2}r^{2n}e^{-r^2}+n\int_0^r x^{2n-1}e^{-x^2}dx$

なお，$\lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{2}r^{2n}e^{-r^2}\right)=0$ だから

$I_n=nI_{n-1}$ が成り立つ

これをくり返し用いて

$I_n=n(n-1)\times\cdots\times 2I_1=\frac{n!}{2}$

また，この式で $n=0$ とすると $I_0=\frac{1}{2}$ となり

(2) から成り立つ

以上より，0以上の整数 n に対し

$I_n=\frac{n!}{2}$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医(医) 工・生命・保 学部	番

数学 平成30年度入学者選抜学力検査解答用紙(前期日程)

I・II・III・A・B

〔IV〕

(1) 2つの曲線 $y=x^3-x$, $y=t^3x^3-tx$ の交点の x 座標を求める。

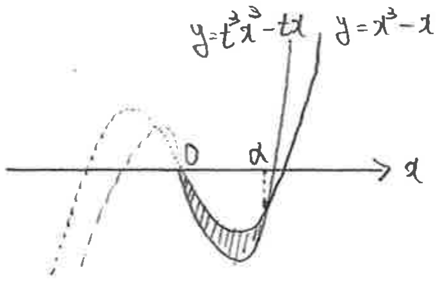
$$x^3-x=t^3x^3-tx$$

$$(t^3-1)x^3-(t-1)x=0$$

$$(t-1)x\{(t^2+t+1)x^2-1\}=0$$

$t\neq 1$ より $x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}$

$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}$ とおく



したがって,

$$F(t)=\left|\int_0^\alpha\{(x^3-x)-(t^3x^3-tx)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_0^\alpha (t-1)x\{1-(t^2+t+1)x^2\}dx\right|$$

$$=|t-1|\left|\int_0^\alpha\{x-(t^2+t+1)x^3\}dx\right|$$

$$=|t-1|\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{(t^2+t+1)}{4}x^4\right]_0^\alpha\right|$$

$$=|t-1|\left|\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+t+1}-\frac{t^2+t+1}{4}\times\frac{1}{(t^2+t+1)^2}\right|$$

$t^2+t+1=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ なので

$$F(t)=\frac{|t-1|}{4(t^2+t+1)}\ \cdots\text{(答)}$$

(2) (i) $t>1$ のとき

$F(t)=\dfrac{t-1}{4(t^2+t+1)}$ より

$$F'(t)=\frac{1\times4(t^2+t+1)-(t-1)\times4(2t+1)}{16(t^2+t+1)^2}$$

$$=\frac{-(t^2-2t-2)}{4(t^2+t+1)^2}$$

$F'(t)=0$ とすると $t=1\pm\sqrt{3}$

$t>1$ より $t=1+\sqrt{3}$

このとき, $t>1$ における増減表は

t	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$F'(t)$		+	0	−
$F(t)$	0	↗	$\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{12}$	↘

(ii) $t<1$ のとき

$F(t)=\dfrac{1-t}{4(t^2+t+1)}$ より

$$F'(t)=\frac{-1\times4(t^2+t+1)-(1-t)\times4(2t+1)}{16(t^2+t+1)^2}$$

$$=\frac{t^2-2t-2}{4(t^2+t+1)^2}$$

$F'(t)=0$ とすると, $t=1\pm\sqrt{3}$

$t<1$ より $t=1-\sqrt{3}$

このとき, $t<1$ における増減表は

t	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$F'(t)$	+	0	−	
$F(t)$	↗	$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{12}$	↘	0

以上 (i), (ii) より

(答) 極大値 $\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{12}$ ($t=1+\sqrt{3}$ のとき)

極大値 $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{12}$ ($t=1-\sqrt{3}$ のとき)

得点	