| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

# 1

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

〔医学部医学科
総合理工学部数理科学科〕

| コード | | 得点 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | | | | | | | | |
| 7 | 8 | | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |

| 採点欄 | |
|---|---|
| | |

**1**

(1) $a>b>c$ で三角形ABCができるので $a<b+c$

また $b>c$ だから $b+c<2b$

よって $2b>a$ …①

$b^2-\left(\sqrt{\frac{ab}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}b(2b-a)>0$ （∵ ①と $b>0$）

$b>0$、$\sqrt{\frac{ab}{2}}>0$ だから $\sqrt{\frac{ab}{2}}<b$ （証明終）

(2) 正弦定理から $c=2R\sin C$、$b=2R\sin B$ だから

$c(1-\cos B)-b(1-\cos C)$

$=2R\{\sin C(1-\cos B)-\sin B(1-\cos C)\}$

$=2R\{(\sin C-\sin B)+(\sin B\cos C-\cos B\sin C)\}$

$=2R\left\{2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}+\sin(B-C)\right\}$

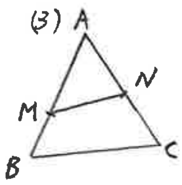
$=2R\left\{-2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}+2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right\}$

$=4R\sin\frac{B-C}{2}\left\{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right\}$

$=4R\sin\frac{B-C}{2}\left\{\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)-\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right\}$

$=8R\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ （証明終）

(3)




$\triangle AMN$ の面積は $\frac{1}{2}AM\cdot AN\sin A$

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}bc\sin A$

$\triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABC$ なので $AM\cdot AN=\frac{1}{2}bc$

また $\triangle AMN$ に余弦定理を用いて

$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos A$

ここで $AM^2+AN^2-bc=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN$

$=(AM-AN)^2\geqq 0$

よって $AM^2+AN^2\geqq bc$

よって $MN^2\geqq bc-2AM\cdot AN\cos A=bc-2\cdot\frac{1}{2}bc\cos A$

$=bc(1-\cos A)$ （証明終）

(4) (2)より $c(1-\cos B)-b(1-\cos C)=8R\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ で

$a>b>c$ より $0°<C<B<180°$ だから $0°<\frac{C}{2}<\frac{B}{2}<90°$ より $\sin\frac{B}{2}>0$ かつ $\sin\frac{C}{2}>0$

また $0°<B-C<180°$ だから $0°<\frac{B-C}{2}<90°$ より $\sin\frac{B-C}{2}>0$

よって $c(1-\cos B)>b(1-\cos C)$

特に $ca(1-\cos B)>ab(1-\cos C)$

上記と同様にして $b(1-\cos A)>a(1-\cos B)$ が示せ

特に $bc(1-\cos A)>ca(1-\cos B)$

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**1**

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

〔医学部医学科
総合理工学部数理科学科〕

| コード | | 得点 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | | | | | | | | |
| 7 | 8 | | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |

| 採点欄 | |
|---|---|
| | |

**1**

(3)より P, Qが AB, AC上にあれば $PQ^2 \geqq bc(1-\cos A)$ が成り立つ

同様 P, Qが AB, BC上にあれば $PQ^2 \geqq ca(1-\cos B)$ が成り立ち

P, Qが BC, AC上にあれば $PQ^2 \geqq ab(1-\cos C)$ が成り立つ

先のことから $bc(1-\cos A) > ca(1-\cos B) > ab(1-\cos C)$ で最小値を求めるので

Pが BC上、Qが AC上とればよい。

このとき $PQ^2 \geqq ab(1-\cos C)$ で

(3)と同様の議論で $CP=CQ$ かつ $CP\cdot CQ=\frac{1}{2}ab$ のとき等号が成り立つ

つまり $CP=CQ=\sqrt{\frac{ab}{2}}$ のときであるが

(1)より $\sqrt{\frac{ab}{2}}<b$ であるから 点Qはたしかに線分AC上にあり $b<a$であるから

点Pは線分 BC上にある。

よって 線分PQは上のとき最小値をとり その最小値は

$$\sqrt{ab(1-\cos C)}=\sqrt{ab\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\sqrt{\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2}} \cdots (\text{答})$$

受験番号

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

**2**

この線より上には解答を記入しないでください。

# 数学　解答用紙

採点欄　**2**

(1) 千の位　百の位　十の位　一の位

□ □ □ □

千の位は，0以外の3通り

百の位，十の位，一の位は，各4通り

したがって，$3\times4\times4\times4=192$通り …(答)

(2) (i) 千の位が0のとき，

千の位　百の位　十の位　一の位

0 □ □ □

百の位，十の位，一の位は各4通り

ただし，4桁の正の整数を求めるので 0000は不適ゆえ

$4\times4\times4-1=63$通り

(ii) 千の位が1で，百の位が0, 1, 2のとき，

千の位　百の位　十の位　一の位

1 □ □ □

0, 1, 2

十の位，一の位は各4通り なので

$3\times4\times4=48$通り

(i), (ii) の次の番号が題意をみたす数なので

$63+48+1=112$番目 …(答)

(3) 放物線と直線が共有点をもつには

$x^2+2ax+b=2cx+d$　これを整理して　$x^2+2(a-c)x+b-d=0$

この2次方程式の判別式を$D/4$とすると，$D/4\geqq0$ が共有点をもつ条件なので

$(a-c)^2-(b-d)\geqq0$ より　$(a-c)^2\geqq b-d$ …(*)

(i) $b-d\leqq0$ のときは，(*)は常に成り立つので

$b\leqq d$ から，

$$\begin{cases} d=0 \text{ のとき } b=0 \\ d=1 \text{ のとき } b=0,1 \\ d=2 \text{ のとき } b=0,1,2 \\ d=9 \text{ のとき } b=0,1,2,9 \end{cases}$$

このとき，$a, c$は任意なので　$4\times4\times10=160$通り

(ii) $b-d=1$ のとき

$((b,d)=(1,0),(2,1))$

このとき，

$(a-c)^2\geqq1$

$a-c\leqq-1,\ a-c\geqq1$

対称性より　$a-c\geqq1$ のときは

$(a,c)=(9,2),(9,1),(9,0)$
$(2,1),(2,0)(1,0)$ の6通りから

$2\times(2\times6)=24$通り

(iii) $b-d=2$ のとき

$((b,d)=(2,0))$

このとき

$(a-c)^2\geqq2$

$a-c\leqq-\sqrt{2},\ a-c\geqq\sqrt{2}$

対称性より $a-c\geqq\sqrt{2}$ のときは

$(a,c)=(9,2),(9,1),(9,0)$
$(2,0)$ の4通りから

$1\times(2\times4)=8$通り

(iv) $b-d=7,8,9$ のとき

$((b,d)=(9,2),(9,1),(9,0))$

このときの$(a,c)$は，3つとも

$a-c\geqq3$ のときを考えて

$(a,c)=(9,2),(9,1),(9,0)$

の3通りであり，対称性から

$3\times(2\times3)=18$通り

以上 (i)〜(iv) より

$160+24+8+18=210$通り …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄 3

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=a_n+\frac{b_n}{4}+\alpha(a_n+b_n)$

$=(1+\alpha)a_n+(\frac{1}{4}+\alpha)b_n$

$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta a_n+\alpha\beta b_n$ より

$\begin{cases}1+\alpha=\beta\\ \frac{1}{4}+\alpha=\alpha\beta\end{cases}$ これを解いて $\alpha_1<\alpha_2$ より

$(\alpha_1,\beta_1)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\alpha_2,\beta_2)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ …(答)

(2) $a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-\frac{1}{2}b_n)$ と変形できる。

数列$\{a_n-\frac{1}{2}b_n\}$は初項 $a_1-\frac{1}{2}b_1=2-\frac{1}{2}\cdot 2=1$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore$ $a_n-\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ …(答) …①

(3) $(\alpha_2,\beta_2)$を用いて (2)と同様に考えると

$a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}=\frac{3}{2}(a_n+\frac{1}{2}b_n)$ から

$a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{3^n}{2^{n-1}}$ …② となる

①②より $a_n=\frac{3^n+1}{2^n}$, $b_n=\frac{3^n-1}{2^{n-1}}$ …(答)

(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC_n}=a_n-\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ ($\because$ (2)より)

$\sum_{n=1}^{\infty}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ は初項1, 公比$\frac{1}{2}$ の無限等比級数

$|\frac{1}{2}|<1$ より収束し、和は $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ …(答)

受験番号

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

**4**

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

(1) $\int_a^x f(t)\,dt = (\log x)^2 - 2\log x - 8 \quad \cdots ①$ とおく.

等式①の両辺を $x$ で微分すると,

$$f(x) = 2(\log x)\cdot\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x} = \frac{2(\log x - 1)}{x} \quad \cdots (答)$$

(2) ①に $x=a$ を代入すると, $(a>0)$

$$\int_a^a f(t)\,dt = (\log a)^2 - 2\log a - 8$$

$$(\log a + 2)(\log a - 4) = 0$$

$$\therefore \log a = -2,\ 4 \quad より \quad a = \frac{1}{e^2},\ e^4 \quad \cdots (答)$$

(3) $x>0$ のとき, $\log x < \sqrt{x}$ を示す.

$x>0$ において, $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$g'(x) = 0$ とすると, $x=4$ ($x>0$ を満たす).

$x>0$ での関数 $g(x)$ の増減表は,

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | 極小 $2(1-\log 2)$ | $\nearrow$ |

極小値 $g(4) = 2 - \log 4 = 2(1-\log 2)$

ここで, $1<2<e$ より, $0<\log 2<1$

であるから, $g(4) = 2(1-\log 2) > 0$

よって, $x>0$ のとき, $g(x)>0$

より, $x>0$ のとき, $\log x < \sqrt{x}$ が示された. [証明終]

このとき, $x>1$ において, $0 < \log x < \sqrt{x}$ だから, $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

ここで, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ だから, はさみうちの原理より, $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$

したがって 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\log x - 1)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \cdots (答)$

(4) $x>0$ のとき,

$$f'(x) = \frac{2(2-\log x)}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(2\log x - 5)}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = e^2$, $f''(x) = 0$ とすると $x = e^{\frac{5}{2}}$

より, 増減表は,

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ | $e^{\frac{5}{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | 極大 $\frac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $\frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}$ | $\searrow$ |

極大値 $f(e^2) = \frac{2}{e^2}$

$f(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{2(\frac{5}{2}-1)}{e^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}$

より, 変曲点は, $\left(e^{\frac{5}{2}}, \frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}\right)$

さらに, (3)より $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, また, $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$

より, 漸近線は, $x$軸 および $y$軸 である.

したがって, グラフは,