受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔物理・マテリアル工学科，物質化学科
地球科学科，知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科，建築デザイン学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄

1 (1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

初項から第n項までの和をS_nとすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ ---- (答)}$$

(2) 初項から第$2n$項までの和S_{2n}は

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1+3)(2k-1+5)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{(2k+4)(2k+6)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{4(n+2)(n+3)}$$

初項から第$2n+1$項までの和S_{2n+1}は

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} a_k + a_{2n+1} = \left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{4(n+2)(n+3)}\right\} + \frac{1}{4(n+2)(n+3)} = \frac{1}{24}$$

以上より

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{4(n+2)(n+3)}\right\} = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underline{\underline{\frac{1}{24}}} \text{ ---- (答)}$$

受験番号

1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2　(1) $\int_a^x f(t)\,dt = (\log x)^2 - 2\log x - 8$ …① とおく.

等式①の両辺をxで微分すると,

$$f(x) = 2(\log x)\cdot\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x} = \frac{2(\log x - 1)}{x}$$ …(答)

(2) ①に $x=a$ を代入すると, $(a>0)$

$$\int_a^a f(t)\,dt = (\log a)^2 - 2\log a - 8$$

$$(\log a + 2)(\log a - 4) = 0$$

$\therefore \log a = -2, 4$ より $a = \frac{1}{e^2}, e^4$ …(答)

(3) $x>0$ のとき, $\log x < \sqrt{x}$ を示す.

$x>0$ において, $g(x) = \sqrt{x} - \log x$ とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$g'(x)=0$ とすると, $x=4$ ($x>0$を満たす).

$x>0$ での関数 $g(x)$ の増減表は,

x	0	…	4	…
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	極小 $2(1-\log 2)$	↗

極小値 $g(4) = 2 - \log 4 = 2(1-\log 2)$

ここで, $1<2<e$ より, $0<\log 2<1$

であるから. $g(4) = 2(1-\log 2) > 0$

よって, $x>0$ のとき, $g(x)>0$

より, $x>0$ のとき, $\log x < \sqrt{x}$ が示された. [証明終]

このとき, $x>1$ において, $0<\log x<\sqrt{x}$ だから, $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

ここで, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ だから, はさみうちの原理より, $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$

したがって, 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\log x - 1)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$ …(答)

(4) $x>0$ のとき,

$$f'(x) = \frac{2(2-\log x)}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(2\log x - 5)}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=e^2$, $f''(x)=0$ とすると $x=e^{\frac{5}{2}}$

より, 増減表は,

x	0	…	e^2	…	$e^{\frac{5}{2}}$	…
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	極大 $\frac{2}{e^2}$	↘	$\frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}$	↘

極大値 $f(e^2) = \frac{2}{e^2}$

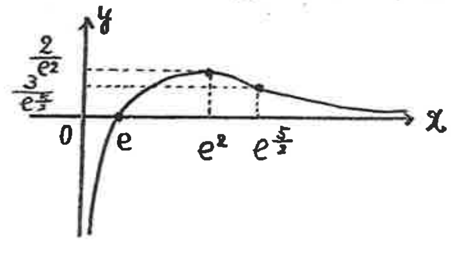
$f(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{2(\frac{5}{2}-1)}{e^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}$

より, 変曲点は, $\left(e^{\frac{5}{2}}, \frac{3}{e^{\frac{5}{2}}}\right)$

さらに, (3)より $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, また, $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$

より, 漸近線は, x軸 および y軸 である.

したがって, グラフは,



受験番号					
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

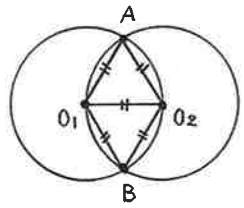
採点欄	

3

(1). 円周角の定理より $\angle APB = \angle AO_1B$，$\angle AQB = \angle AO_2B$

このとき，四角形 AO_1BO_2 は 1辺の長さが 1 のひし形であり、

かつ，$O_1O_2 = 1$ であるから，$\triangle AO_1O_2$，$\triangle BO_1O_2$は正三角形



よって，$\angle APB = \angle AO_1B = \angle AO_1O_2 + \angle BO_1O_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\angle AQB = \angle AO_2B = \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

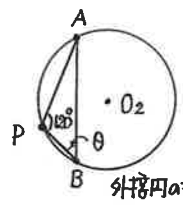
したがって，$\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$ となり題意は示された。[証明終]

さらに，四角形 APBQ より、

$\angle ABQ = 360^\circ - (30^\circ + 120^\circ + 120^\circ + \theta) = \underline{\underline{90^\circ - \theta}}$ …(答)

(2). $\triangle ABP$ において，正弦定理より $\dfrac{AB}{\sin 120^\circ} = 2 \times 1$

$AB = 2\sin 120^\circ = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ …(答)



(3) $\triangle ABP$ において，正弦定理より $\dfrac{AP}{\sin\theta} = 2 \times 1$

$\therefore AP = \underline{\underline{2\sin\theta}}$ …(答)

$\triangle ABQ$ において，正弦定理より $\dfrac{AQ}{\sin(90^\circ - \theta)} = 2 \times 1$

$\therefore AQ = 2\sin(90^\circ - \theta) = \underline{\underline{2\cos\theta}}$ …(答)

(4) 点Pが O_1 から B まで動くことより，$30^\circ \leqq \theta < 60^\circ$

このとき，$\triangle APQ$ の面積を $S(\theta)$ とおくと，

$$S(\theta) = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

ここで，$30^\circ \leqq \theta < 60^\circ$ より、$60^\circ \leqq 2\theta < 120^\circ$ だから

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin 2\theta \leqq 1$$

よって，
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq S(\theta) \leqq \frac{1}{2}$$

したがって，$\sin 2\theta = 1$ すなわち $\underline{\underline{\theta = 45^\circ \text{のとき、} \triangle APQ \text{の最大値は} \frac{1}{2}}}$ …(答)