受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔教育学部
人間科学部
生物資源科学部〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) $x^2+(a+1)x+(a^2-1)=0$ の判別式を D_1 とすると

$D_1=(a+1)^2-4(a^2-1)\geqq 0$ であるから

$3a^2-2a-5\geqq 0$

$(3a-5)(a+1)\geqq 0$　よって $\underline{\underline{-1\leqq a\leqq \frac{5}{3}}}$ …(答)

(2) $x^2+ax+(ab-1)=0$ の判別式を D_2 とすると

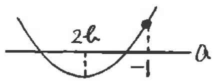
この方程式が実数解をもつのは $D_2=a^2-4(ab-1)\geqq 0$

つまり $a^2-4ba+4\geqq 0$ … ① をみたすときである.

よって $-1\leqq a\leqq \frac{5}{3}$ に対して ① をみたす b の値の範囲を求める

ここで, $f(a)=a^2-4ba+4=(a-2b)^2-4b^2+4$ とおく

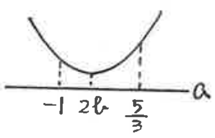
(i) $2b<-1$ つまり $b<-\frac{1}{2}$ のとき



$f(-1)\geqq 0$ より $1+4b+4\geqq 0$ ∴ $b\geqq -\frac{5}{4}$

よって $-\frac{5}{4}\leqq b<-\frac{1}{2}$

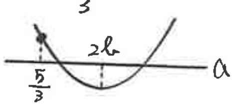
(ii) $-1\leqq 2b\leqq \frac{5}{3}$ つまり $-\frac{1}{2}\leqq b\leqq \frac{5}{6}$ のとき



$-4b^2+4\geqq 0$ ∴ $-1\leqq b\leqq 1$

よって $-\frac{1}{2}\leqq b\leqq \frac{5}{6}$

(iii) $\frac{5}{3}<2b$ つまり $\frac{5}{6}<b$ のとき



$f(\frac{5}{3})\geqq 0$ より $\frac{25}{9}-\frac{20}{3}b+4\geqq 0$ ∴ $b\leqq \frac{61}{60}$

よって $\frac{5}{6}<b\leqq \frac{61}{60}$

(i), (ii), (iii) より求める b の値の範囲は $\underline{\underline{-\frac{5}{4}\leqq b\leqq \frac{61}{60}}}$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

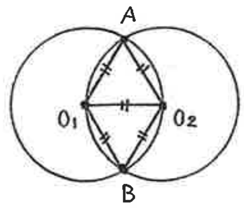
2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄 | 2

(1). 円周角の定理より $\angle APB = \angle AO_1B$, $\angle AQB = \angle AO_2B$



このとき. 四角形 AO_1BO_2 は 1辺の長さが 1 のひし形であり、
かつ. $O_1O_2 = 1$ であるから、$\triangle AO_1O_2$, $\triangle BO_1O_2$ は正三角形

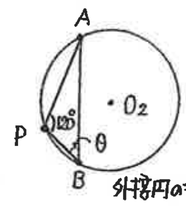
よって、$\angle APB = \angle AO_1B = \angle AO_1O_2 + \angle BO_1O_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$
$\angle AQB = \angle AO_2B = \angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

したがって. $\angle APB = \angle AQB = 120^\circ$ となり 題意は示された. [証明終]

さらに, 四角形 APBQ より、

$$\angle ABQ = 360^\circ - (30^\circ + 120^\circ + 120^\circ + \theta) = \underline{\underline{90^\circ - \theta}} \cdots (答).$$

(2). $\triangle ABP$ において、正弦定理より.
$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = 2 \times 1$$
$$AB = 2\sin 120^\circ = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \cdots (答)$$



(3) $\triangle ABP$ において. 正弦定理より
$$\frac{AP}{\sin\theta} = 2 \times 1$$
$$\therefore AP = \underline{\underline{2\sin\theta}} \cdots (答)$$

$\triangle ABQ$ において. 正弦定理より
$$\frac{AQ}{\sin(90^\circ - \theta)} = 2 \times 1$$
$$\therefore AQ = 2\sin(90^\circ - \theta) = \underline{\underline{2\cos\theta}} \cdots (答)$$

(4) 点Pが O_1 から B まで動くことより、$30^\circ \leqq \theta < 60^\circ$
このとき、$\triangle APQ$ の面積を $S(\theta)$ とおくと、

$$S(\theta) = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

ここで, $30^\circ \leqq \theta < 60^\circ$ より、$60^\circ \leqq 2\theta < 120^\circ$ だから.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin 2\theta \leqq 1$$

よって.
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq S(\theta) \leqq \frac{1}{2}$$

したがって. $\sin 2\theta = 1$ すなわち $\underline{\underline{\theta = 45^\circ \text{のとき、} \triangle APQ \text{の最大値は} \frac{1}{2}}} \cdots (答)$

受験番号					
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3 (1)

$I_1=\int_0^1(x-a)(x-b)dx$

$=\int_0^1\{x^2-(a+b)x+ab\}dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a+b}{2}+ab$

また $f'=2x-(a+b)$ で

$I_2=\int_0^1\{2x-(a+b)\}^2dx$

$=\int_0^1\{4x^2-4(a+b)x+(a+b)^2\}dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-2(a+b)x^2+(a+b)^2x\right]_0^1=\frac{4}{3}-2(a+b)+(a+b)^2$

だから

$I_2-4I_1=\frac{4}{3}-2(a+b)+(a+b)^2-4\left(\frac{1}{3}-\frac{a+b}{2}+ab\right)$

$=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqq 0$

よって　$4I_1\leqq I_2$（等号は $a=b$ のとき）　（証明終）

(2)　(1)より $a+b=t$ とおくと a, bは実数なので tも実数で

$I_2=t^2-2t+\frac{4}{3}=(t-1)^2+\frac{1}{3}$

より $t=1$ つまり $a+b=1$ のとき I_2は最小値$\frac{1}{3}$ …（答）

(3)　$S_1=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_0^a=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2(a+b)}{2}+a^2b$

また

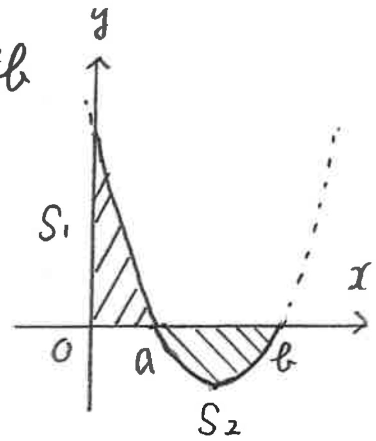
$\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

$=\int_a^b(x-a)\{(x-a)+(a-b)\}dx$

$=\int_a^b\{(x-a)^2+(a-b)(x-a)\}dx$

$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}+(a-b)\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b$

$=-\frac{1}{6}(b-a)^3$ より $S_2=\frac{1}{6}(b-a)^3$



$S_1=S_2$ なので　$\frac{a^3}{3}-\frac{a^2(a+b)}{2}+a^2b=\frac{1}{6}(b-a)^3$

これを解いて　$3ab^2-b^3=0$

$0<a<b$ で (1)より $a+b=1$ だから　$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$ …（答）