

受験番号					
1	2	3	4	5	6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

教育学部  
人間科学部  
生物資源科学部

コード	得点	1	2	3
2	0			
7	8	11	12	14
		15	17	18

採点欄 1

(1)  $-y = (-x)^2 + a(-x) + b$  から  $y = -x^2 + ax - b \dots$  (答)

(2)  $y = x^2 + ax + b$  が  $(-1, -3)$  を通るから  
 $-3 = 1 - a + b \quad \therefore b = a - 4 \dots$  ①

$y = x^2 + ax + b$  は  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $2$  平行移動すると  $y - 2 = (x + 1)^2 + a(x + 1) + b$

$$y = x^2 + (a + 2)x + a + b + 3$$

$y = x$  と接するから

$$x = x^2 + (a + 2)x + a + b + 3 \text{ から}$$

$$x^2 + (a + 1)x + a + b + 3 = 0 \text{ の判別式 } \Delta \geq 0 \text{ とすると}$$

$$\Delta = (a + 1)^2 - 4(a + b + 3) = 0 \dots$$
 ②

①②より  $(a, b) = (1, -3), (5, 1) \dots$  (答)

(3)  $f(x) = x^2 - 2ax + b + ba - 9$  とおく

$f(x) = 0$  の判別式  $\Delta \geq 0$  とすると

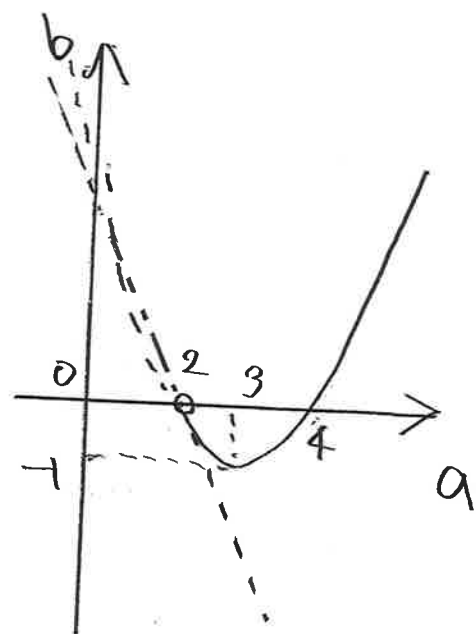
$\Delta/4 \geq 0$  より  $b \leq (a - 3)^2 \dots$  ④

$|ba| = 9$  より  $b = (a - 3)^2 - 1 \dots$  ⑤

軸に平行  $x = a > 1 \dots$  ⑥

$f(1) > 1$  より  $b > -4a + 8 \dots$  ⑦

④⑤⑥⑦より右図の実線部分



この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

採点欄

2 (1)  $\vec{q} = \vec{p} + k\vec{n}$  ( $k$ は実数)と表せよ。  
 線分PQの中点をMとするとMの位置ベクトルは  $\frac{\vec{p} + \vec{q}}{2}$

Mは $q_1$ 上の点だから  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

$$\vec{n} \cdot \left( \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} - \vec{a} \right) = 0, \quad \vec{n} \cdot (\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{a}) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (2\vec{p} + k\vec{n} - 2\vec{a}) = 0, \quad k|\vec{n}|^2 = 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p})$$

$$|\vec{n}| = 1 \text{ より } k = 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p})$$

$$\text{よって } \vec{q} = \vec{p} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n} \text{ (証明終)}$$

(2) (1)と同様にして

$$\vec{r} = \vec{q} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{q})\vec{n}$$

$z = z'$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{q} &= \vec{n} \cdot \left\{ \vec{p} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n} \right\} \\ &= \vec{n} \cdot \vec{p} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p}) = 2\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{p} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n} + 2\{ \vec{n} \cdot \vec{a} - (2\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{p}) \}\vec{n} \\ &= \underline{\underline{\vec{p} + 2(\vec{n} \cdot \vec{a} - \vec{n} \cdot \vec{a})\vec{n}}} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

数学 解答用紙

採点欄

3

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x$$

$$f'(x) = x^2 - a^2$$

(1)  $f'(0) = -a^2$  したがって  $(0,0)$  における接線  $l_0$  は  $l_0: y = -a^2x$  ... (答)

(2)  $f'(b) = b^2 - a^2$  で、 $l_0$  と  $l$  が直交するとき  $-a^2(b^2 - a^2) = -1$

$a > 0$  したがって両辺を  $a^2$  で割ると

$$b^2 - a^2 = \frac{1}{a^2} \quad \therefore b^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$a, b > 0$  より  $b = \frac{\sqrt{a^4 + 1}}{a}$  ... (答)

(3)  $l: y = (b^2 - a^2)(x - b) + \frac{1}{3}b^3 - a^2b$   
 $y = (b^2 - a^2)x - \frac{2}{3}b^3$

$l_0$  と  $l$  の交点を求めると

$$-a^2x = (b^2 - a^2)x - \frac{2}{3}b^3 \quad \text{より} \quad x = \frac{2}{3}b$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S(a) &= \int_0^{\frac{2}{3}b} \left\{ \left( \frac{1}{3}x^3 - a^2x \right) - \left( -a^2x \right) \right\} dx + \int_{\frac{2}{3}b}^b \left\{ \left( \frac{1}{3}x^3 - a^2x \right) - \left( (b^2 - a^2)x + \frac{2}{3}b^3 \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}b} \frac{1}{3}x^3 dx + \int_{\frac{2}{3}b}^b \left( \frac{1}{3}x^3 - b^2x + \frac{2}{3}b^3 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{12}x^4 \right]_0^{\frac{2}{3}b} + \left[ -\frac{1}{2}b^2x^2 + \frac{2}{3}b^3x \right]_{\frac{2}{3}b}^b \\ &= \frac{1}{12}b^4 - \frac{1}{2}b^2 \left( b^2 - \frac{4}{9}b^2 \right) + \frac{2}{3}b^3 \cdot \frac{1}{3}b \\ &= \frac{1}{12}b^4 - \frac{5}{18}b^4 + \frac{2}{9}b^4 \\ &= \frac{1}{36}b^4 \\ &= \frac{1}{36} \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(4)  $a^2 > 0, \frac{1}{a^2} > 0$  したがって相加平均と相乗平均の大小関係より  $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$

よって (3) より  $S(a) = \frac{1}{36} \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 \geq \frac{1}{36} \cdot 2^2 = \frac{1}{9}$

等号は  $a^2 = \frac{1}{a^2}$  したがって  $a^4 = 1$   $a > 0$  より  $a = 1$

ゆえに 最小値は  $\frac{1}{9}$  ( $a = 1$  のとき) ... (答)