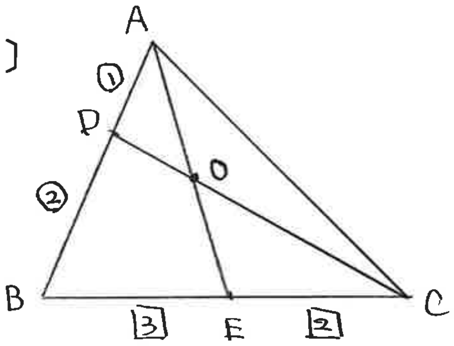
志望学部	受験番号
医、医 学部	番

数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅰ〕



(1) メネラウスの定理より

$\frac{2}{1} \times \frac{AO}{OE} \times \frac{2}{5} = 1$ より $\frac{AO}{OE} = \frac{5}{4}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{9}$

したがって、$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$ …(答)

(2) $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}| = R$ とすると

(1)より

$81R^2 = 4|\vec{p}|^2 + 9|\vec{q}|^2 + 12\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ①

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{7\vec{p} - 3\vec{q}}{9}$ なので

$81R^2 = 49|\vec{p}|^2 + 9|\vec{q}|^2 - 42\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ②

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = \frac{6\vec{q} - 2\vec{p}}{9}$ なので

$81R^2 = 4|\vec{p}|^2 + 36|\vec{q}|^2 - 24\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ③

② − ① : $45|\vec{p}|^2 - 54\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$

$|\vec{p}|^2 = \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ④

② − ③ : $45|\vec{p}|^2 - 27|\vec{q}|^2 - 18\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$

$54\vec{p}\cdot\vec{q} - 18\vec{p}\cdot\vec{q} = 27|\vec{q}|^2$

$|\vec{q}|^2 = \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ⑤

また、$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{q} - \vec{p}|^2$

$= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q} + \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} = \frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ⑥

④, ⑤, ⑥ より

$AB^2 : BC^2 : CA^2$

$= \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= 9 : 4 : 10$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医・医 学部	番

数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅱ〕

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) & \cdots ① \\ \{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 = 1 & \cdots ② \\ f'(x+y) = f'(x)f'(y) - f(x)f(y) & \cdots ③ \\ f'(0) = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$ とする

(1) ① において $x=0$ とすると

$f(0) = -f(0)$ より　$\underline{\underline{f(0)=0}}$ …(答)

(2) ② において $x=-x$ とすると

$\{f(-x)\}^2 + \{f'(-x)\}^2 = 1$ …⑤

②−⑤：$\{f(x)\}^2 - \{f(-x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 - \{f'(-x)\}^2 = 0$

①より　$\{f(x)\}^2 - \{-f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 - \{f'(-x)\}^2 = 0$

$\{f'(x)\}^2 = \{f'(-x)\}^2$

$f'(x) = \pm f'(-x)$

ここで $f'(x) = -f'(-x)$ のとき，$x=0$ とすると $1=-1$

となり不適

したがって，$f'(x) = f'(-x)$ が成り立つので

$f'(x)$ は偶関数である。

(3) $x = \frac{u+v}{2}$，$y = \frac{u-v}{2}$ とおくと

$u = x+y$，$v = x-y$

このとき ③ より

$f'(u) = f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$ …(*1)

また，③において，$y=-y$ とすると

$f'(x-y) = f'(x)f'(-y) - f(x)f(-y)$

(2) と ① より

$f'(x-y) = f'(x)f'(y) + f(x)f(y)$ が成り立つ

$f'(v) = f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right) + f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$ …(*2)

(*1) − (*2) より

$f'(u) - f'(v) = -2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$ が成り立つ

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

$\displaystyle= \lim_{h\to 0}\frac{-2f\left(x+\frac{h}{2}\right)f\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$ （∵(3)より）

ここで $f(0)=0$，$f'(0)=1$ より

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1$ から

$\displaystyle= \lim_{h\to 0}\left\{-f\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right\} = -f(x)$

したがって，$f'(x)$ は微分可能であり

$f''(x) = -f(x)$ となる

得点	

志望学部	受験番号
医・医 学部	番

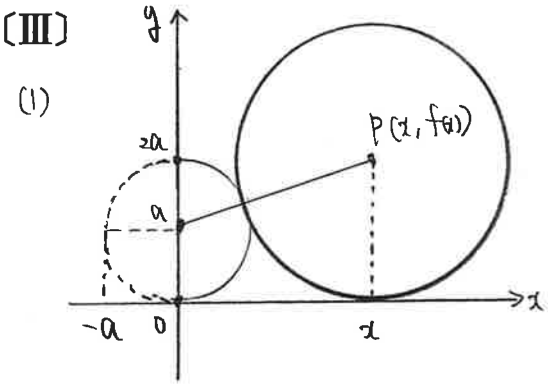
数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

I・II・III・A・B

〔III〕

(1)

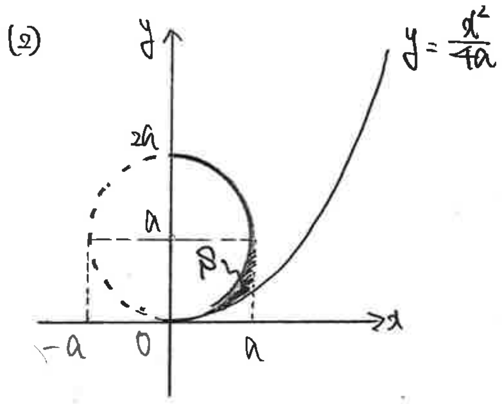


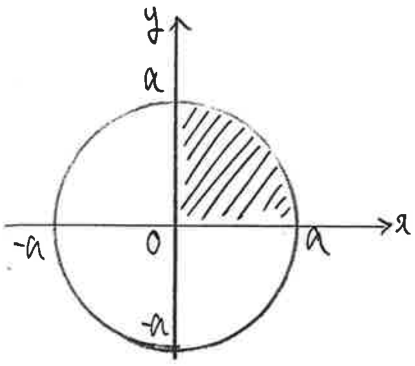
$(x-0)^2+(f(x)-a)^2=(a+f(x))^2$ を展開して，整理すると

$4af(x)=x^2$

$a>0$ より $\underline{\underline{f(x)=\dfrac{x^2}{4a}}}$ …(答)

(2)





$x^2+(y-a)^2=a^2$ より $y-a<0$ から $y=a-\sqrt{a^2-x^2}$

求める面積 S は

$S=\int_0^a\left\{(a-\sqrt{a^2-x^2})-\dfrac{x^2}{4a}\right\}dx$

$S=\left[ax-\dfrac{x^3}{12a}\right]_0^a-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ …(*)

ここで $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は左の図1)の斜線部分の面積を表す

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2\times\dfrac{1}{4}$ だから (*) より

$S=\dfrac{11}{12}a^2-\dfrac{\pi}{4}a^2=\underline{\underline{\dfrac{11-3\pi}{12}a^2}}$ …(答)

(3) 求める体積 V は

$V=\int_0^a\pi(a-\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\int_0^a\pi\left(\dfrac{x^2}{4a}\right)^2dx$

$=\pi\int_0^a(2a^2-x^2-2a\sqrt{a^2-x^2})\,dx-\pi\int_0^a\dfrac{x^4}{16a^2}dx$

$=\pi\left[2a^2x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a-2a\pi\times\dfrac{\pi}{4}a^2-\pi\left[\dfrac{x^5}{80a^2}\right]_0^a$

$=\pi\left(\dfrac{5}{3}a^3-\dfrac{a^3}{80}-\dfrac{\pi}{2}a^3\right)$

$\underline{\underline{V=\left(\dfrac{397}{240}-\dfrac{\pi}{2}\right)\pi a^3}}$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医・医 学部	番

数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

I・II・III・A・B

〔IV〕

(1) 真数条件より $x>-2$ で考える

$f(x)=\log(x+2)-x$ とおく

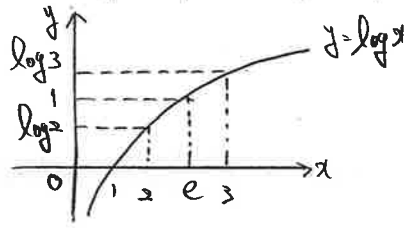
$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1$

このとき，$x>-2$ における増減表は

x	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to-2+0}f(x)=-\infty$

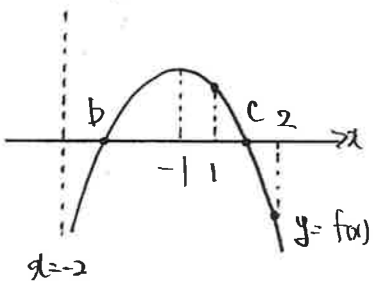


$f(2)=\log4-2$

$=2(\log2-1)<0$

$f(1)=\log3-1>0$

より



$y=f(x)$ は左図のようになるので，$f(x)=0$ は2つの解をもつことが示せた。

$-2<b<-1$ より　$m=-2$ …(答)

$1<c<2$ より　$n=1$ …(答)

(2) $g(x)=\log(x+2)$ は $x>-2$ で微分可能で区間 $[s,t]$ において，平均値の定理を用いると

$\dfrac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}=g'(p)$ となる p が

$s<p<t$ に存在する

つまり $\dfrac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}=\dfrac{1}{p+2}<\dfrac{1}{s+2}$ が成り立つ

(3) $t=a_n$，$s=c$ とすると

$\dfrac{\log(a_n+2)-\log(c+2)}{a_n-c}=\dfrac{a_{n+1}-\log(c+2)}{a_n-c}$

ここで c は $\log(c+2)=c$ をみたすので

$\dfrac{\log(a_n+2)-\log(c+2)}{a_n-c}=\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}$ …①

(2)において $1<c<2$ だから

$\dfrac{\log(a_n+2)-\log(c+2)}{a_n-c}<\dfrac{1}{c+2}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$ …②

①，②より $\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}<\dfrac{1}{2}$ が成り立つ

また，$y=\log x$ で $\log(a_n+2)-\log(c+2)$ と a_n-c

は同符号より　$0<\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}<\dfrac{1}{2}$

したがって，$\left|\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}\right|<\dfrac{1}{2}$ が成り立つ

(4) (3)より $|a_n-c|<\dfrac{1}{2}|a_{n-1}-c|$ が成り立つ

これを繰り返し用いると

$|a_n-c|<\dfrac{1}{2}|a_{n-1}-c|<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-c|$

したがって，$|a_n-c|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times c$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times c=0$ より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-c|=0$

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=c$ が成り立つ。

得点	