志　望　学　部	受　験　番　号
~~医(生命保健)~~ 工 学部	番

数　学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅰ〕

(1) $x_{n+1}-pq=\left(\frac{p-1}{p}\right)(x_n-pq)$ と変形できる。

数列 $\{x_n-pq\}$ は初項 $x_1-pq=a-pq$

公比 $\frac{p-1}{p}$ の等比数列であるから

$x_n-pq=(a-pq)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}$

$\therefore x_n=(a-pq)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}+pq$ …(答)

(2) $p>1$ より $0<\frac{p-1}{p}<1$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=pq$ …(答)

(3) $p=10$, $q=\frac{1}{10}$, $a=0$ のとき $x_n=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

$\therefore x_2=\frac{1}{10}$, $x_3=\frac{19}{100}$, $x_4=\frac{271}{1000}$ …(答)

(4) $x_n>0.99$ より $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}>\frac{99}{100}$ から

$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$

両辺正より常用対数をとって $\log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<\log_{10}\frac{1}{100}$

$(n-1)(2\log_{10}3-1)<-2$ 　これを解いて

$n>\frac{2}{0.0458}+1=44.6\ldots$

これをみたす最小の自然数 n は $n=45$ …(答)

得　点	

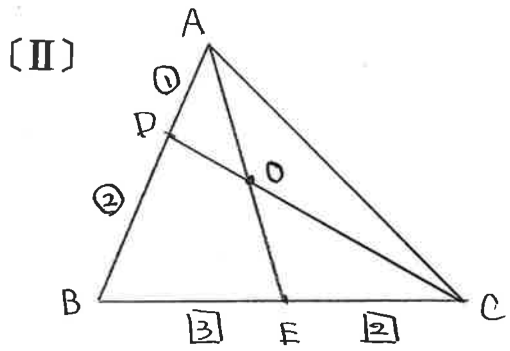
志望学部	受験番号
医([illegible])学部 工	番

数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅱ〕



(1) メネラウスの定理より

$\frac{2}{1} \times \frac{AO}{OE} \times \frac{2}{5} = 1$ より $\frac{AO}{OE} = \frac{5}{4}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{9}$

したがって、$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$ …(答)

(2) $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}| = R$ とすると

(1) より

$81R^2 = 4|\vec{p}|^2 + 9|\vec{q}|^2 + 12\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ①

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{7\vec{p} - 3\vec{q}}{9}$ なので

$81R^2 = 49|\vec{p}|^2 + 9|\vec{q}|^2 - 42\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ②

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = \frac{6\vec{q} - 2\vec{p}}{9}$ なので

$81R^2 = 4|\vec{p}|^2 + 36|\vec{q}|^2 - 24\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ③

② − ①：$45|\vec{p}|^2 - 54\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$

$|\vec{p}|^2 = \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ④

② − ③：$45|\vec{p}|^2 - 27|\vec{q}|^2 - 18\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$

$54\vec{p}\cdot\vec{q} - 18\vec{p}\cdot\vec{q} = 27|\vec{q}|^2$

$|\vec{q}|^2 = \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ⑤

また，$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{q} - \vec{p}|^2$

$= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q} + \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} = \frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q}$ … ⑥

④，⑤，⑥ より

$AB^2 : BC^2 : CA^2$

$= \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= 9 : 4 : 10$ …(答)

得点	

志望学部	受験番号
医(生命・保健) 工 学部	番

数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

I・II・III・A・B

〔III〕
$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) & \cdots ① \\ \{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 = 1 & \cdots ② \\ f'(x+y) = f'(x)f'(y) - f(x)f(y) & \cdots ③ \\ f'(0) = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$
とする

(1) ①において $x=0$ とすると

$f(0) = -f(0)$ より $\underline{f(0)=0}$ …(答)

(2) ②において $x=-x$ とすると

$\{f(-x)\}^2 + \{f'(-x)\}^2 = 1$ …⑤

②−⑤：$\{f(x)\}^2 - \{f(-x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 - \{f'(-x)\}^2 = 0$

①より $\{f(x)\}^2 - \{-f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 - \{f'(-x)\}^2 = 0$

$\{f'(x)\}^2 = \{f'(-x)\}^2$

$f'(x) = \pm f'(-x)$

ここで $f'(x) = -f'(-x)$ のとき，$x=0$ とすると $1=-1$

となり不適

したがって，$f'(x) = f'(-x)$ が成り立つので

$f'(x)$ は偶関数である．

(3) $x = \dfrac{u+v}{2}$，$y = \dfrac{u-v}{2}$ とおくと

$u = x+y$，$v = x-y$

このとき③より

$f'(u) = f'\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f'\left(\dfrac{u-v}{2}\right) - f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$ …(*1)

また，③において，$y=-y$ とすると．

$f'(x-y) = f'(x)f'(-y) - f(x)f(-y)$

(2)と①より

$f'(x-y) = f'(x)f'(y) + f(x)f(y)$ が成り立つ

$f'(v) = f'\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f'\left(\dfrac{u-v}{2}\right) + f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$ …(*2)

(*1)−(*2)より

$f'(u) - f'(v) = -2f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$ が成り立つ

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\frac{-2f\left(x+\frac{h}{2}\right)f\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$ （∵(3)より）

ここで $f(0)=0$，$f'(0)=1$ より

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1$ から

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\left\{-f\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right\} = -f(x)$

したがって，$f'(x)$ は微分可能であり

$f''(x) = -f(x)$ となる

得点	

志望学部	受験番号
医(生命・保健)学部 工	番

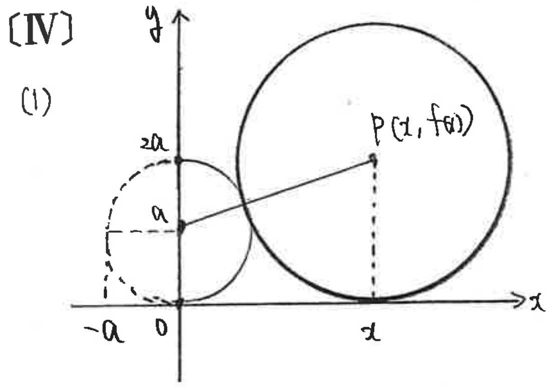
数学

令和２年度入学者選抜学力検査解答用紙（前期日程）

Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅳ〕

(1)

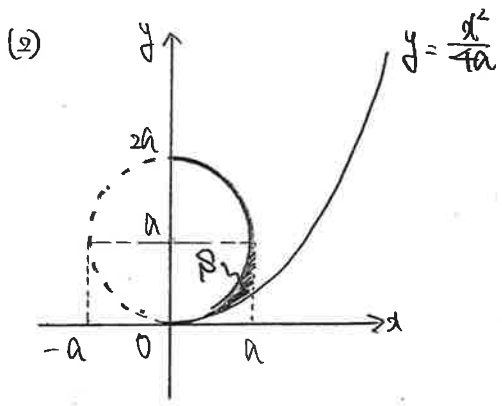


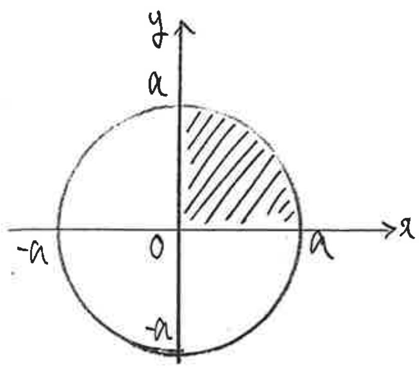
$(x-0)^2+(f(x)-a)^2=(a+f(x))^2$ を展開して，整理すると

$$4af(x)=x^2$$

$a>0$ より $f(x)=\dfrac{x^2}{4a}$ …(答)

(2)





$x^2+(y-a)^2=a^2$ より $y-a<0$ から $y=a-\sqrt{a^2-x^2}$

求める面積 S は

$$S=\int_0^a\left\{(a-\sqrt{a^2-x^2})-\frac{x^2}{4a}\right\}dx$$

$$S=\left[ax-\frac{x^3}{12a}\right]_0^a-\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \cdots (*)$$

ここで $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は左の図1の斜線部分の面積を表す

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2\times\frac{1}{4}$ だから (*) より

$$S=\frac{11}{12}a^2-\frac{\pi}{4}a^2=\frac{11-3\pi}{12}a^2 \quad \cdots (答)$$

(3) 求める体積 V は

$$V=\int_0^a\pi(a-\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\int_0^a\pi\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^a(2a^2-x^2-2a\sqrt{a^2-x^2})\,dx-\pi\int_0^a\frac{x^4}{16a^2}dx$$

$$=\pi\left[2a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a-2a\pi\times\frac{\pi}{4}a^2-\pi\left[\frac{x^5}{80a^2}\right]_0^a$$

$$=\pi\left(\frac{5}{3}a^3-\frac{a^3}{80}-\frac{\pi}{2}a^3\right)$$

$$V=\left(\frac{397}{240}-\frac{\pi}{2}\right)\pi a^3 \quad \cdots (答)$$

得点	