受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4		5	
2	0											
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21	23	24

採点欄	

1

(1) $\left(x+\frac{t}{x}\right)^3=x^3+3x^2\left(\frac{t}{x}\right)+3x\left(\frac{t}{x}\right)^2+\left(\frac{t}{x}\right)^3=\underline{\underline{x^3+3tx+3t^2\frac{1}{x}+\frac{t^3}{x^3}}}$ …(答)

(2) $x^3f\left(x+\frac{t}{x}\right)=x^3\left\{\left(x+\frac{t}{x}\right)^3+a\left(x+\frac{t}{x}\right)+b\right\}$

$=x^3\left\{\left(x^3+3xt+\frac{3t^2}{x}+\frac{t^3}{x^3}\right)+a\left(x+\frac{t}{x}\right)+b\right\}$

x^4の係数は $\underline{\underline{3t+a}}$

x^3の係数は $\underline{\underline{b}}$

x^2の係数は $\underline{\underline{3t^2+at}}$ …(答)

(3) $f(x)=x^3+3x-1$ について

$x^3f\left(x+\frac{t}{x}\right)=x^3\left\{\left(x^3+3tx+\frac{3t^2}{x}+\frac{t^3}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{t}{x}\right)-1\right\}$

$=x^6+(3t+3)x^4-x^3+(3t^2+3t)x^2+t^3$

ここで $t=-1$ とすると

$x^3f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^6-x^3-1$

$x^6-x^3-1=0$ の解は

$x^3=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　$x>0$ として　$x^3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,　$\frac{1}{x^3}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　$x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$、$\frac{1}{x}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ で　$x>\frac{1}{x}$ なので　$x-\frac{1}{x}>0$

$x^3+3x-1=0$ は正の実数解 α をただ1つもつので

$\alpha=x-\frac{1}{x}=\underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}$ …(答)

受験番号

1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

$a_1=4$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+10}{a_n+1}$ …①

$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ …②　とおく

(1) ①より $n=1$ のとき $a_2=\dfrac{4a_1+10}{a_1+1}=\dfrac{16+10}{4+1}=\dfrac{26}{5}$

②より、$n=2$ のとき $b_2=\dfrac{a_2-\frac{6}{5}}{a_2-\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{26}{5}-\frac{6}{5}}{\frac{26}{5}-\frac{1}{5}}=\dfrac{4}{5}$ …(答)

(2) $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{\frac{4a_n+10}{a_n+1}-\beta}{\frac{4a_n+10}{a_n+1}-\alpha}=\dfrac{4a_n+10-\beta(a_n+1)}{4a_n+10-\alpha(a_n+1)}=\dfrac{(4-\beta)a_n+10-\beta}{(4-\alpha)a_n+10-\alpha}$

$=\dfrac{4-\beta}{4-\alpha}\cdot\dfrac{a_n+\frac{10-\beta}{4-\beta}}{a_n+\frac{10-\alpha}{4-\alpha}}$

このとき、題意より数列 $\{b_n\}$ は、等比数列となることより　$b_{n+1}=r\,b_n$ すなわち $\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=r\cdot\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$

(rは実数)

となることより、$\dfrac{10-\alpha}{4-\alpha}=-\alpha$ かつ $\dfrac{10-\beta}{4-\beta}=-\beta$

$\alpha^2-3\alpha-10=0$　　同様にして

$(\alpha+2)(\alpha-5)=0$　　$\beta=-2, 5$

$\therefore\ \alpha=-2, 5$

$\alpha<4$ かつ $\alpha<\beta$ より　$\alpha=-2$, $\beta=5$ …(答)

(3) (2)の結果より $b_{n+1}=-\dfrac{1}{6}b_n$, $b_1=\dfrac{a_1-5}{a_1+2}=\dfrac{4-5}{4+2}=-\dfrac{1}{6}$

より、$b_n=\left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

このとき、$-10^{-78}<b_n<10^{-78}$

$\therefore\ |b_n|<10^{-78}$

$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n<10^{-78}$

ここで底10の対数をとると

$(-n)\log_{10}6<-78$

$n>\dfrac{78}{\log_{10}6}=\dfrac{78}{\log_{10}2+\log_{10}3}=\dfrac{78}{0.7781}=100.2\cdots$

nは自然数より　$n\geqq 101$

よって、求める最小の自然数nは、$n=101$ …(答)

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) 1回目に $i \neq j$ の目が出て
2回目に (i, j) または (j, i) の目が出ればよい。
1回目の目の出方は $6 \times 5 = 30$ 通り、2回目は 2通り
よって $\dfrac{30 \times 2}{6^2 \times 6^2} = \dfrac{5}{108}$ …(答)

(2) 1回目に $i \neq j$ の目が出て
2回目に 1回目と異なる、同目が出て
3回目に 1回目, 2回目と異なる、同目が出ればよい
$\dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^2 \times 6^2 \times 6^2}$ $\dfrac{5}{1944}$ …(答)

(3)
(i) 1回目 $(2, 2)$, 2回目 $(5, 5)$, 3回目 (i, j) のとき (ただし $i \neq j$)
(i, j) の選び方について
・2,3,4,5 から 2つ $_4P_2$ ○
・1,6から1つ, 2,5から1つ 8 ●
} 20通り

i＼j	1	2	3	4	5	6
1		●			●	
2	●		○	○	○	●
3		○		○	○	
4		○	○		○	
5	●	○	○	○		●
6		●			●	

(ii) $(2, 2)$, (i, j), $(5, 5)$ のとき ($i \neq j$)
(i) のうち、$(1, 5)$, $(5, 1)$ を除く 18通り

(iii) (i, j), $(2, 2)$, $(5, 5)$ のとき ($i \neq j$)
(ii) のうち. $(2, 6)$, $(6, 2)$ を除く 16通り

(i)(ii)(iii) はそれぞれ $(2, 2)$, と $(5, 5)$ を入れかえたものが同数ある

(IV) 3回とも $(2, 2)$, $(5, 5)$ の2種類のみ含むとき
$(2, 2)$, $(2, 2)$, $(5, 5)$ など $2^3 - 2 = 6$ 通り

以上より $\dfrac{(20 + 18 + 16) \times 2 + 6}{6^6} = \dfrac{114}{6^6} = \dfrac{19}{7776}$ …(答)

受験番号

1	2	3	4	5	6

4

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	4	選択欄	

(1) $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{AC}{AB} = \underline{\underline{1}}$ …(答)

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \underline{\underline{\pm\dfrac{2}{3}\pi}}$ …(答)

(2) $z = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。

$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

ここで、$n=3$ のとき $z=\cos(\pm\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{3}\pi)$ から $z^3=1$

$\therefore (\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

$=(\beta-\alpha)^2\cdot\dfrac{z^3-1}{z-1}=0$ (証明終)

(3) (2)と同様に $z^n=\left(\cos(\pm\frac{2}{n}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{n}\pi)\right)^n=1$ を用いて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\alpha)^{n-k}(\beta-\alpha)^{k-1}$

$=(\beta-\alpha)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$

$=(\beta-\alpha)^{n-1}\times\dfrac{z^n-1}{z-1}=0$ (証明終)

数学　解答用紙

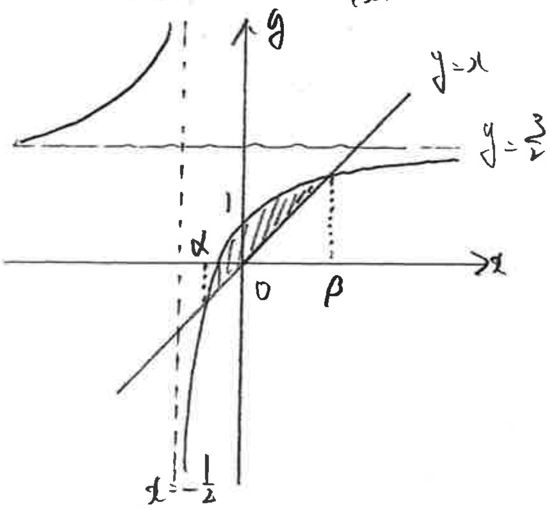
採点欄　5　選択欄

(1) $y=f(x)$ と $y=x$ を連立して $\frac{3x+1}{2x+1}=x$ より $2x^2-2x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha<\beta$ より $\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ …(答)

(2) $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{4x+2}$



求める面積を S とすると

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4x+2}\right)-x\right\}dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\log|4x+2|\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$S=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\frac{1}{4}\log\left|\frac{4\beta+2}{4\alpha+2}\right|$$

ここで、$\beta-\alpha=\sqrt{3}$, $\beta+\alpha=1$ なので

$$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{1}{4}\log\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3}-\frac{1}{4}\log\frac{(4+2\sqrt{3})^2}{4}$$

$S=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$ …(答)

(3) $y=f(x)$ 上の点を (x, y), 対称移動させた点を (X, Y) とすると、この2点の中点が $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ なので

$$\begin{cases}\frac{x+X}{2}=-\frac{1}{2} \text{ より } x=-X+1\\ \frac{y+Y}{2}=\frac{3}{2} \text{ より } y=-Y+3\end{cases}$$

これを $y=f(x)$ に代入して、$-Y+3=\frac{3(-X-1)+1}{2(-X-1)+1}$

$$-Y+3=\frac{3X+2}{2X+1}$$

$$Y=3-\frac{3X+2}{2X+1}=\frac{3X+1}{2X+1}$$

したがって、求める曲線の方程式は $y=\frac{3x+1}{2x+1}$ …(答)