| 受 験 番 号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**1**

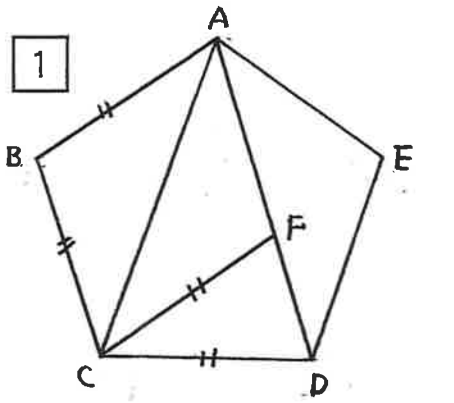
この線より上には解答を記入しないでください。

# 数 学　解 答 用 紙

〔物理・マテリアル工学科, 物質化学科
地球科学科, 知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科, 建築デザイン学科〕

| コード | | 得点 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | | | | | | | | |
| 7 | 8 | | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |

| 採点欄 | 1 |
|---|---|




(1) $\angle ABC = 108^\circ$ …(答), $\angle BAC = 36^\circ$ …(答)

(2) 証明) △ABCに余弦定理より

$$1^2 = 1^2 + a^2 - 2 \times 1 \times a \cos 36^\circ$$

$$a^2 = 2a\cos 36^\circ$$

$a \neq 0$ より $a = 2\cos 36^\circ$ が成り立つ (証明終)

(3) 証明) CF = 1 となる点Fを線分AD上にとると, $\angle CFD = 72^\circ$ なので, $\angle ACF = 36^\circ$

なので, AF = CF = 1 となるから FD = $a-1$

$\triangle ACD \sim \triangle CFD$ より $1:(a-1) = a:1$

$$a(a-1) = 1$$

$a^2 - a - 1 = 0$ より $a = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a > 0$ より $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ

また, (2)より $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ が成り立つ (証明終)

(4) 証明) 点Aから辺CDに垂線を下ろした足をHとすると $\angle HAC = 18^\circ$, $CH = \dfrac{1}{2}$ より

$$AH^2 = a^2 - \frac{1}{4} = (a+1) - \frac{1}{4} = a + \frac{3}{4} = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

$AH > 0$ より $AH = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

$$\cos 18^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{16}}$$

$\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ が成り立つ (証明終)

受験番号

1 2 3 4 5 6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

$a_{n+1} = pa_n + qb_n \quad \cdots ①$

$b_{n+1} = qa_n + pb_n \quad \cdots ②$

(1) $a_1 = p$, $b_1 = q$ で ①,②において $n=1,2$を代入すると

$a_2 = p^2 + q^2 \quad b_2 = 2pq \quad \cdots$（答）

$a_3 = p^3 + 3pq^2$, $b_3 = q^3 + 3p^2q \cdots$（答）

(2) ①+②から

$a_{n+1} + b_{n+1} = (p+q)(a_n + b_n)$

よって数列$\{a_n + b_n\}$は初項$a_1 + b_1 = p+q$, 公比$(p+q)$の等比数列であるから

$a_n + b_n = (p+q)^n \cdots$（答） $\cdots ③$

①−②から

$a_{n+1} - b_{n+1} = (p-q)(a_n - b_n)$

よって数列$\{a_n - b_n\}$は初項$a_1 - b_1 = p-q$, 公比$(p-q)$の等比数列であるから

$a_n - b_n = (p-q)^n \cdots$（答）$\cdots ④$

(3) ③+④から $a_n = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^n + (p-q)^n\} \cdots$（答）

③−④から $b_n = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^n - (p-q)^n\} \cdots$（答）

(4)

(i) $m=1$のとき. $a_1 = p$より$p$の倍数

$m=2$のとき $a_3 = p^3 + 3pq^2 = p(p^2 + 3q^2)$ より$p$の倍数

(ii) $k \geqq 2$ において $m = k-1, k$ のとき成り立っていると仮定する.

すなわち $a, b$を整数として

$a_{2k-3} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-3} + (p-q)^{2k-3}\} = ap$, $a_{2k-1} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\} = bp$

と表せる.

$m = k+1$のとき

$a_{2k+1} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k+1} + (p-q)^{2k+1}\} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1}\cdot(p+q)^2 + (p-q)^{2k-1}\cdot(p-q)^2\}$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - \{(p-q)^2(p+q)^{2k-1} + (p+q)^2(p-q)^{2k-1}\}\Big]$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - (p+q)^2(p-q)^2\{(p+q)^{2k-3} + (p-q)^{2k-3}\}\Big]$

$= bp\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - ap(p+q)^2(p-q)^2$

$= p\big[b\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - a(p+q)^2(p-q)^2\big]$

となり $a_{2k+1}$ は $p$の倍数である.

よって(i)(ii)によりすべての自然数$m$に対して

$a_{2m-1}$は$p$の倍数である.（証明終）

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**3**

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

| 採点欄 | 3 | 選択欄 | |
|---|---|---|---|

(1) $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{AC}{AB} = \underline{\underline{1}}$ …(答)

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \underline{\underline{\pm\dfrac{2}{3}\pi}}$ …(答)

(2) $z = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。

$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

ここで、$n=3$ のとき $z=\cos(\pm\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{3}\pi)$ から $z^3=1$

$\therefore (\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

$=(\beta-\alpha)^2\cdot\dfrac{z^3-1}{z-1}=0$ (証明終)

(3) (2)と同様に $z^n=\left(\cos(\pm\frac{2}{n}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{n}\pi)\right)^n=1$ を用いて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\alpha)^{n-k}(\beta-\alpha)^{k-1}$

$=(\beta-\alpha)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$

$=(\beta-\alpha)^{n-1}\times\dfrac{z^n-1}{z-1}=0$ (証明終)

受験番号

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

4

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

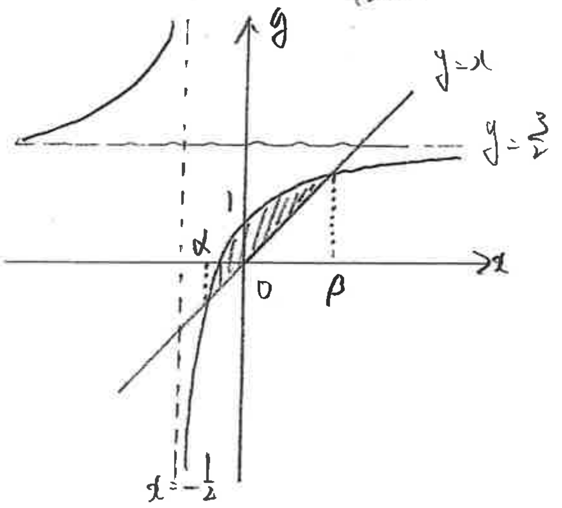
採点欄　4　選択欄

(1) $y=f(x)$ と $y=x$ を連立して $\frac{3x+1}{2x+1}=x$ より $2x^2-2x-1=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\alpha<\beta$ より $\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ …(答)

(2) $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{4x+2}$




求める面積をSとすると

$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4x+2}\right)-x\right\}dx$

$=\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\log|4x+2|\right]_{\alpha}^{\beta}$

$S=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\frac{1}{4}\log\left|\frac{4\beta+2}{4\alpha+2}\right|$

ここで、$\beta-\alpha=\sqrt{3}$, $\beta+\alpha=1$ なので

$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{1}{4}\log\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}-\frac{1}{4}\log\frac{(4+2\sqrt{3})^2}{4}$

$S=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$ …(答)

(3) $y=f(x)$ 上の点を $(x,y)$、対称移動させた点を $(X,Y)$ とすると、この2点の中点が $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ なので

$\frac{x+X}{2}=-\frac{1}{2}$ より $x=-X+1$

$\frac{y+Y}{2}=\frac{3}{2}$ より $y=-Y+3$

これを $y=f(x)$ に代入して、$-Y+3=\frac{3(-X-1)+1}{2(-X-1)+1}$

$-Y+3=\frac{3X+2}{2X+1}$

$Y=3-\frac{3X+2}{2X+1}=\frac{3X+1}{2X+1}$

したがって、求める曲線の方程式は $y=\frac{3x+1}{2x+1}$ …(答)