受　験　番　号					
1	2	3	4	5	6

1

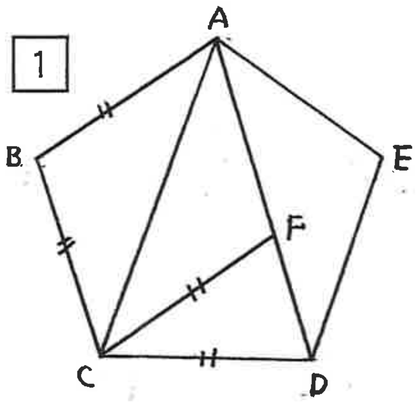
この線より上には解答を記入しないでください。

数　学　　解　答　用　紙

〔物理・マテリアル工学科，物質化学科
地球科学科，知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科，建築デザイン学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	1



(1) $\angle ABC = \underline{\underline{108^\circ}}$ …(答)，$\angle BAC = \underline{\underline{36^\circ}}$ …(答)

(2) 証明）△ABCに余弦定理より

$1^2 = 1^2 + a^2 - 2 \times 1 \times a \cos 36^\circ$

$a^2 = 2a \cos 36^\circ$

$a \neq 0$ より　$a = 2\cos 36^\circ$ が成り立つ（証明終）

(3) 証明）CF＝1となる点Fを線分AD上にとると，$\angle CFD = 72^\circ$ なので，$\angle ACF = 36^\circ$

なので，AF＝CF＝1 となるから $FD = a - 1$

△ACD ∽ △CFD より　$1 : (a-1) = a : 1$

$a(a-1) = 1$

$a^2 - a - 1 = 0$ より $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a > 0$ より　$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ

また，(2) より　$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ が成り立つ　（証明終）

(4) 証明）点Aから辺CDに垂線を下ろした足をHとすると $\angle HAC = 18^\circ$，$CH = \frac{1}{2}$ より

$AH^2 = a^2 - \frac{1}{4} = (a+1) - \frac{1}{4} = a + \frac{3}{4} = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$

$AH > 0$ より　$AH = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

$\cos 18^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{16}}$

$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ が成り立つ　（証明終）

受験番号					
1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

$a_{n+1} = pa_n + qb_n \quad \cdots ①$

$b_{n+1} = qa_n + pb_n \quad \cdots ②$

(1) $a_1 = p,\ b_1 = q$ で ①, ② において $n=1, 2$ を代入すると

$a_2 = p^2 + q^2 \qquad b_2 = 2pq \quad \cdots$ (答)

$a_3 = p^3 + 3pq^2,\ b_3 = q^3 + 3p^2q \cdots$ (答)

(2) ①+②から

$a_{n+1} + b_{n+1} = (p+q)(a_n + b_n)$

よって数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = p+q$, 公比 $(p+q)$ の等比数列であるから

$a_n + b_n = (p+q)^n \cdots$ (答) $\cdots ③$

①−②から

$a_{n+1} - b_{n+1} = (p-q)(a_n - b_n)$

よって数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = p-q$, 公比 $(p-q)$ の等比数列であるから

$a_n - b_n = (p-q)^n \cdots$ (答) $\cdots ④$

(3) ③+④から $a_n = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^n + (p-q)^n\} \cdots$ (答)

③−④から $b_n = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^n - (p-q)^n\} \cdots$ (答)

(4)

(i) $m=1$ のとき．$a_1 = p$ より p の倍数

$m=2$ のとき　$a_3 = p^3 + 3pq^2 = p(p^2 + 3q^2)$ より p の倍数

(ii) $k \geqq 2$ において　$m = k-1, k$ のとき成り立っていると仮定する．

すなわち a, b を整数として

$a_{2k-3} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-3} + (p-q)^{2k-3}\} = ap$，$a_{2k-1} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\} = bp$

と表せる．

$m = k+1$ のとき

$a_{2k+1} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k+1} + (p-q)^{2k+1}\} = \dfrac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1}\cdot(p+q)^2 + (p-q)^{2k-1}\cdot(p-q)^2\}$

$= \dfrac{1}{2}\left[\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - \{(p-q)^2(p+q)^{2k-1} + (p+q)^2(p-q)^{2k-1}\}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\{(p+q)^{2k-1} + (p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - (p+q)^2(p-q)^2\{(p+q)^{2k-3} + (p-q)^{2k-3}\}\right]$

$= bp\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - ap(p+q)^2(p-q)^2$

$= p\left[b\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} - a(p+q)^2(p-q)^2\right]$

となり a_{2k+1} は p の倍数である．

よって (i)(ii) によりすべての自然数 m に対して

a_{2m-1} は p の倍数である．(証明終)

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	3	選択欄	

(1) $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{AC}{AB} = \underline{\underline{1}}$ …(答)

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \underline{\underline{\pm\dfrac{2}{3}\pi}}$ …(答)

(2) $z = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。

$(\gamma-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + (\beta-\alpha)^2$

$= (\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

ここで、$n=3$ のとき $z=\cos(\pm\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{3}\pi)$ から $z^3=1$

$\therefore (\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta-\alpha)^2(z^2+z+1)$

$=(\beta-\alpha)^2\cdot\dfrac{z^3-1}{z-1} = 0$ (証明終)

(3) (2)と同様に $z^n = \left(\cos(\pm\frac{2}{n}\pi)+i\sin(\pm\frac{2}{n}\pi)\right)^n = 1$ を用いて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\alpha)^{n-k}(\beta-\alpha)^{k-1}$

$\displaystyle=(\beta-\alpha)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$

$=(\beta-\alpha)^{n-1}\times\dfrac{z^n-1}{z-1} = 0$ (証明終)

4

受験番号

1 2 3 4 5 6

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

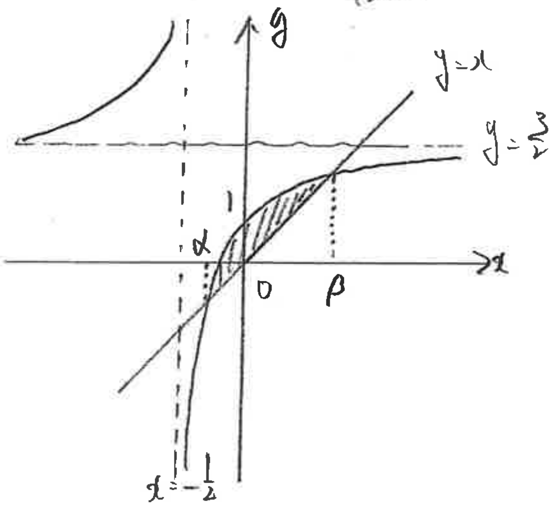
選択欄

(1) $y=f(x)$ と $y=x$ を連立して $\dfrac{3x+1}{2x+1}=x$ より $2x^2-2x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\alpha<\beta$ より $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ …(答)

(2) $f(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4x+2}$



求める面積を S とすると

$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4x+2}\right)-x\right\}dx$

$=\left[\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}\log|4x+2|\right]_{\alpha}^{\beta}$

$S=\dfrac{3}{2}(\beta-\alpha)-\dfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{4\beta+2}{4\alpha+2}\right|$

ここで，$\beta-\alpha=\sqrt{3}$, $\beta+\alpha=1$ なので

$S=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}\log\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}\log\dfrac{(4+2\sqrt{3})^2}{4}$

$S=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$ …(答)

(3) $y=f(x)$ 上の点を (x,y)，対称移動させた点を (X,Y) とすると，この2点の中点が $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ なので

$$\begin{cases}\dfrac{x+X}{2}=-\dfrac{1}{2} \text{ より } x=-X+1\\[2mm] \dfrac{y+Y}{2}=\dfrac{3}{2} \text{ より } y=-Y+3\end{cases}$$

これを $y=f(x)$ に代入して，$-Y+3=\dfrac{3(-X-1)+1}{2(-X-1)+1}$

$-Y+3=\dfrac{3X+2}{2X+1}$

$Y=3-\dfrac{3X+2}{2X+1}=\dfrac{3X+1}{2X+1}$

したがって，求める曲線の方程式は $y=\dfrac{3x+1}{2x+1}$ …(答)