受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔人間科学部
生物資源科学部〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1)
証明)
$55=5\times 11$、$72=2^3\times 3^2$ で 55と72は共通な素因数をもたないので

55と72は互いに素である。（証明終）

(2) $72=1\times 55+17$

$55=3\times 17+4$ であるから

$55x+72y=1$

$55x+(1\times 55+17)y=1$

$55(x+y)+17y=1$

$(3\times 17+4)(x+y)+17y=1$

$17(3x+4y)+4(x+y)=1$

$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ x+y=-4 \end{cases}$ として $\begin{cases} x=-17 \\ y=13 \end{cases}$ …(答)

(3) $55x+72y=c$ …①

(2)より $x=-17c$、$y=13c$ は①の解で

$55(-17c)+72\times 13c=c$ …②

①−②より
$55(x+17c)+72(y-13c)=0$

$55(x+17c)=-72(y-13c)$

(1)より 55と72は互いに素なので

$x+17c=-72\ell$ (ℓは整数) とおけ

このとき $y-13c=55\ell$

よって①の整数解は $(x,y)=(-17c-72\ell,\ 13c+55\ell)$ (ℓは整数) …(答)

(4) 証明)
$\frac{-17}{72}c-\frac{-13}{55}c=\frac{13\times 72-17\times 55}{72\times 55}c=\frac{c}{3960}>1$ …③

(3)で $x>0$、$y>0$ をみたすℓは $\ell<\frac{-17c}{72}$ かつ $\ell>\frac{-13c}{55}$ をみたすが

③より 整数ℓが存在する

つまり $55x+72y=c$ の整数解で $x>0$ かつ $y>0$ をみたすものが存在する

（証明終）

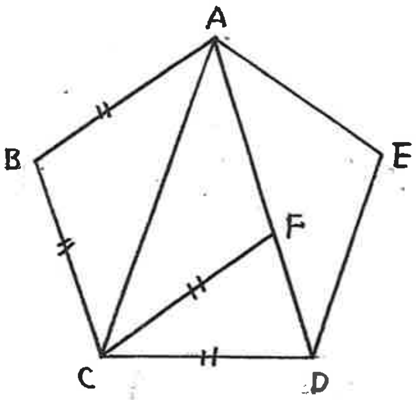
受験番号					
1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	2



(1) $\angle ABC = \underline{\underline{108^\circ}}$ …(答), $\angle BAC = \underline{\underline{36^\circ}}$ …(答)

(2) 証明) △ABCに余弦定理より

$$1^2 = 1^2 + a^2 - 2 \times 1 \times a \cos 36^\circ$$

$$a^2 = 2a\cos 36^\circ$$

$a \neq 0$ より $a = 2\cos 36^\circ$ が成り立つ (証明終)

(3) 証明) $CF = 1$ となる点Fを線分AD上にとると、$\angle CFD = 72^\circ$ なので、$\angle ACF = 36^\circ$

なので、$AF = CF = 1$ となるから $FD = a-1$

$\triangle ACD \backsim \triangle CFD$ より $1 : (a-1) = a : 1$

$$a(a-1) = 1$$

$a^2 - a - 1 = 0$ より $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a > 0$ より $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ

また、(2)より $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ が成り立つ (証明終)

(4) 証明) 点Aから辺CDに垂線を下ろした足をHとすると $\angle HAC = 18^\circ$, $CH = \dfrac{1}{2}$ より

$$AH^2 = a^2 - \frac{1}{4} = (a+1) - \frac{1}{4} = a + \frac{3}{4} = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

$AH > 0$ より $AH = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

$$\cos 18^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{16}}$$

$\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ が成り立つ (証明終)

受 験 番 号

1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数 学　解 答 用 紙

採点欄

3

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ …①

$b_{n+1} = qa_n + pb_n$ …②

(1) $a_1 = p,\ b_1 = q$ で ①,②において $n=1,2$ を代入すると

$a_2 = p^2+q^2$　$b_2 = 2pq$ …(答)

$a_3 = p^3+3pq^2,\ b_3 = q^3+3p^2q$ …(答)

(2) ①+②から

$a_{n+1}+b_{n+1} = (p+q)(a_n+b_n)$

よって数列$\{a_n+b_n\}$は初項 $a_1+b_1=p+q$, 公比 $(p+q)$ の等比数列であるから

$a_n+b_n=(p+q)^n$ …(答) …③

①−②から

$a_{n+1}-b_{n+1}=(p-q)(a_n-b_n)$

よって数列$\{a_n-b_n\}$は初項 $a_1-b_1=p-q$, 公比 $(p-q)$ の等比数列であるから

$a_n-b_n=(p-q)^n$ …(答) …④

(3) ③+④から $a_n = \frac{1}{2}\{(p+q)^n+(p-q)^n\}$ …(答)

③−④から $b_n = \frac{1}{2}\{(p+q)^n-(p-q)^n\}$ …(答)

(4)

(i) $m=1$ のとき、$a_1=p$ より p の倍数

$m=2$ のとき　$a_3=p^3+3pq^2=p(p^2+3q^2)$ より p の倍数

(ii) $k \geqq 2$ において $m=k-1,\ k$ のとき成り立っていると仮定する。

すなわち a, b を整数として

$a_{2k-3}=\frac{1}{2}\{(p+q)^{2k-3}+(p-q)^{2k-3}\}=ap$，$a_{2k-1}=\frac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1}+(p-q)^{2k-1}\}=bp$

と表せる。

$m=k+1$ のとき

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2}\{(p+q)^{2k+1}+(p-q)^{2k+1}\}=\frac{1}{2}\{(p+q)^{2k-1}\cdot(p+q)^2+(p-q)^{2k-1}\cdot(p-q)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\{(p+q)^{2k-1}+(p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}-\{(p-q)^2(p+q)^{2k-1}+(p+q)^2(p-q)^{2k-1}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\{(p+q)^{2k-1}+(p-q)^{2k-1}\}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}-(p+q)^2(p-q)^2\{(p+q)^{2k-3}+(p-q)^{2k-3}\}\right]$$

$$=bp\{(p+q)^2+(p-q)^2\}-ap(p+q)^2(p-q)^2$$

$$=p\left[b\{(p+q)^2+(p-q)^2\}-a(p+q)^2(p-q)^2\right]$$

となり a_{2k+1} は p の倍数である。

よって(i)(ii)によりすべての自然数 m に対して

a_{2m-1} は p の倍数である。(証明終)