受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

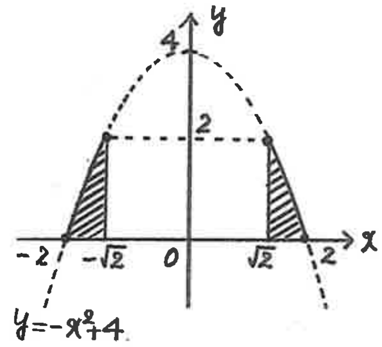
採点欄	

1 $|x^2-2|+|y| \leqq 2 \quad \cdots ①$ とおく．

(1) $|x| \geqq \sqrt{2}$ かつ $y \geqq 0$ のとき．①は，$x^2-2+y \leqq 2$

$\therefore y \leqq -x^2+4$

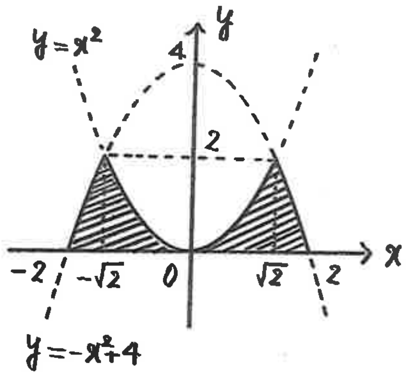
となり，求める (x, y) の範囲は，図の斜線部分．
ただし，境界線を含む．



(2) $|x| \leqq \sqrt{2}$ かつ $y \geqq 0$ のとき．①は $-(x^2-2)+y \leqq 2$

$\therefore y \leqq x^2$

となるから，$y \geqq 0$ となる (x, y) の範囲は，
(1)の領域も含めて図示すると，図の斜線部分となる．
ただし，境界線を含む．



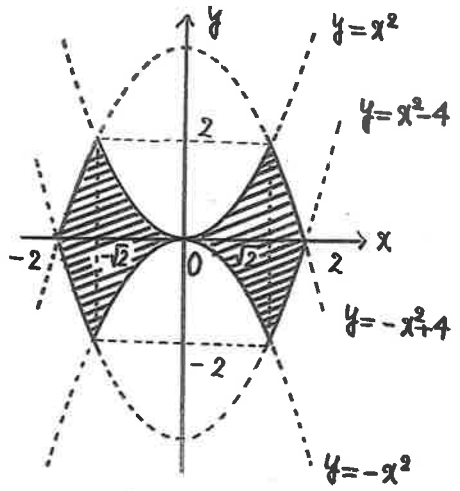
(3) (i) $|x| \geqq \sqrt{2}$ かつ $y \leqq 0$ のとき．①は $x^2-2-y \leqq 2$

$\therefore y \geqq x^2-4$

(ii) $|x| \leqq \sqrt{2}$ かつ $y \leqq 0$ のとき．①は，$-(x^2-2)-y \leqq 2$

$\therefore y \geqq -x^2$

以上，(2)と(i)(ii)より，不等式①で表される領域Dは，図の斜線部分．
ただし，境界線を含む．



このとき，x軸，y軸に関しての図形の対称さ考えて，求める面積を S とすると，

$$\frac{1}{4}S = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (-x^2+4)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{8}{3}+8\right) - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3}(2-\sqrt{2})$$

したがって，

$$S = \frac{32}{3}(2-\sqrt{2}) \quad \cdots (答)$$

受験番号

1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB}$ より、

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ …(答)

(2) A, Bは異なる2点であるから、$|\overrightarrow{AB}| > 0$。

したがって、

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = a^2 + b^2 - 2c > 0$

[証明終]

(3) $f(s) = |\overrightarrow{OP}|^2$ とおく。

$f(s) = |(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}|^2$

$= (a^2+b^2-2c)s^2 + 2(-a^2+c)s + a^2$

$= (a^2+b^2-2c)\left(s - \dfrac{a^2-c}{a^2+b^2-2c}\right)^2 + \dfrac{a^2b^2-c^2}{a^2+b^2-2c}$

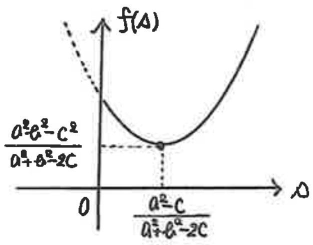
(2)より $a^2+b^2-2c > 0$ であるから、$f(s)$は下に凸の2次関数になる。

軸：$s = \dfrac{a^2-c}{a^2+b^2-2c} > \dfrac{a^2 - \frac{a^2+b^2}{2}}{a^2+b^2-2c}$ （∵ $a^2+b^2-2c>0$ より $c < \dfrac{a^2+b^2}{2}$）

$= \dfrac{(a-b)(a+b)}{2(a^2+b^2-2c)} \geqq 0$ （∵ $a \geqq b$ より $a-b \geqq 0$）

頂点のy座標：$\dfrac{a^2b^2-c^2}{a^2+b^2-2c} > 0$ （∵ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ より、$|\cos\theta|<1$ から $|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}| < |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$ だから、$c^2 < a^2b^2$ より $a^2b^2 - c^2 > 0$）

したがって、2次関数 $f(s)$ のグラフは右の図のようになり、



$s = \dfrac{a^2-c}{a^2+b^2-2c}$ で最小値をもつ。

よって、$|\overrightarrow{OP}|$ は最小値をもち、

最小値 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2-c^2}{a^2+b^2-2c}}$ …(答)

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $t=-x$ とおくと、$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ となり、

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2px+1}+x+q\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-2pt+1}-t+q\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2pt+1)-(t-q)^2}{\sqrt{t^2-2pt+1}+(t-q)}=\lim_{t\to\infty}\frac{2(q-p)t+1-q^2}{\sqrt{t^2-2pt+1}+(t-q)}=\lim_{t\to\infty}\frac{2(q-p)+\frac{1-q^2}{t}}{\sqrt{1-\frac{2p}{t}+\frac{1}{t^2}}+\left(1-\frac{q}{t}\right)}$$

$$=q-p=r$$

よって、$q=p+r$ を満たせばよい。($1\leqq p,q,r\leqq 6$)

$q=1$ のとき (p,r) は存在しない

$q=2$ のとき $(p,r)=(1,1)$

$q=3$ のとき $(p,r)=(1,2),(2,1)$

$q=4$ のとき $(p,r)=(1,3),(2,2),(3,1)$

$q=5$ のとき $(p,r)=(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$

$q=6$ のとき $(p,r)=(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ の 15通り

したがって、求める確率は、$\dfrac{15}{6^3}=\underline{\underline{\dfrac{5}{72}}}$ …(答)

(2) $$\int_0^r(px^2-4x+q)\,dx=\left[\frac{1}{3}px^3-2x^2+qx\right]_0^r=\frac{1}{3}pr^3-2r^2+qr<0$$

$r>0$ であるから、$pr^2-6r+3q<0$ …①

すなわち、$3q<r(6-pr)$ を満たせばよい。

$1\leqq p,q,r\leqq 6$ より $6-pr>0$ をみたすには $p\leqq 5$ であるから、

$p=1$ のとき、$3q<r(6-r)$ より $(r,q)=(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)$ $(4,1),(4,2),(5,1)$

$p=2$ のとき、$3q<2r(3-r)$ より $(r,q)=(1,1),(2,1)$

$p=3$ のとき、$q<r(2-r)$ を満たす (r,q) は存在しない。

$p=4$ のとき、$3q<2r(3-2r)$ を満たす (r,q) は存在しない。

$p=5$ のとき、$3q<r(6-5r)$ を満たす (r,q) は存在しない。

以上より、①を満たす (p,q,r) の組合せは、10通り

したがって、求める確率は、$\dfrac{10}{6^3}=\underline{\underline{\dfrac{5}{108}}}$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

4

この線より上には解答を記入しないでください

数学　解答用紙

採点欄　4

(1) $\frac{1}{a^2}-1-2\left(\frac{1}{a}-1\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}+1=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2>0 \quad (\because 0<a<1)$

したがって，$2\left(\frac{1}{a}-1\right)<\frac{1}{a^2}-1$ は成り立つ　　（証明終）

(2) $f(x)=ax-\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=a-\frac{1}{1+x}$

$0<a<1$ のとき，$2\left(\frac{1}{a}-1\right)>0$ であるから

$2\left(\frac{1}{a}-1\right)<x \iff \frac{2}{a}-1<1+x \iff \frac{a}{2-a}>\frac{1}{1+x}$

$\iff a-\frac{a}{2-a}<a-\frac{1}{1+x} \iff a\times\frac{1-a}{2-a}<f'(x)$

したがって，$0<a<1$ のとき，$a\times\frac{1-a}{2-a}>0$ なので $2\left(\frac{1}{a}-1\right)<x<\frac{1}{a^2}-1$ において $f'(x)>0$ …①

② $f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)=2(1-a)-\log\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)+1\right)$

$1-a=t$ とおくと，$0<a<1$ のとき $0<t<1$

$f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)=2t-\log\left(2\left(\frac{1}{1-t}-1\right)+1\right)=2t-\log\frac{1+t}{1-t}=g(t)$ とする

$g'(t)=2-\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)=2\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)=\frac{-2t^2}{1-t^2}<0 \quad (\because 0<t<1)$

そして，$g(0)=0$ より $0<t<1$ で $g(t)<0$ つまり $f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)<0$ …②

① $f\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-\log\left(\frac{1}{a^2}-1+1\right)=\frac{1-a^2}{a}+2\log a=h(a)$ とすると，

$h'(a)=\frac{-2a\times a-(1-a^2)\times 1}{a^2}+\frac{2}{a}=\frac{-a^2+2a-1}{a^2}=-\frac{(a-1)^2}{a^2}<0$

そして，$h(1)=0$ より $0<a<1$ で $h(a)>0$ つまり $f\left(\frac{1}{a^2}-1\right)>0$ …③

以上 ①，②，③ より 題意は示せた

（証明終）

(3) $S=\int_0^\beta\{\log(1+x)-ax\}dx=\left[(1+x)\log(1+x)-x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^\beta$

$S=(1+\beta)\log(1+\beta)-\beta-\frac{a}{2}\beta^2$

ここで $\log(1+\beta)=a\beta$ なので

$S=(1+\beta)\times a\beta-\beta-\frac{a}{2}\beta^2$

$S=\frac{a}{2}\beta^2+(a-1)\beta$ …（答）