2022 鳥取・医[Ⅲ]、工[Ⅳ]

(1) $f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t$

$= 2\cos t(1 - 2\sin t)$

$f'(t) = 0$ は $\cos t = 0$ または $\sin t = \frac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	0
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

増減表より $f(t)$ の最大値は

$t = \frac{\pi}{6}$ のとき $\underline{\frac{1}{2}}$ …(答)

(2) $y = 1 - \cos 2t = 1$ のとき $\cos 2t = 0$

$0 \leqq 2t \leqq \pi$ から $2t = \frac{\pi}{2}$ $\therefore t = \frac{\pi}{4}$

このとき $x = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 1 = \sqrt{2} - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin 2t}{2\cos t(1 - 2\sin t)} = \frac{2\sin t}{1 - 2\sin t}$ より

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 - \sqrt{2}$

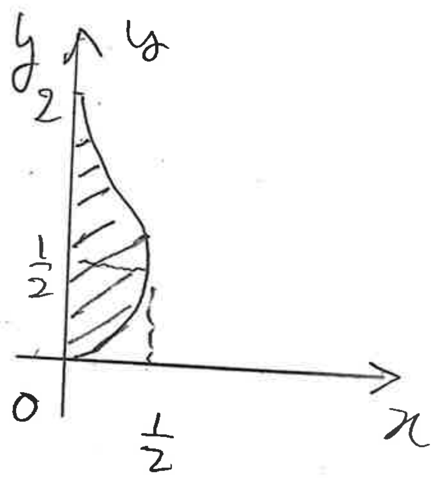
よって求める接線は $y = -(2+\sqrt{2})(x - \sqrt{2} + 1) + 1$

$\therefore \underline{y = -(2+\sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1}$ …(答)

(3) $\frac{dy}{dt} = 2\sin 2t$

増減表より 求める面積は図の斜線部

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	0
x	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↖	2



$S = \int_0^2 x\,dy$ $\quad dy = 2\sin 2t\,dt$

y	$0 \to 2$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

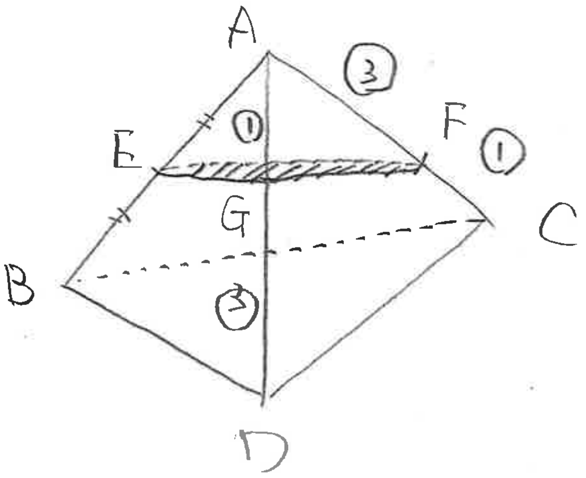
$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t + \cos 2t - 1)\cdot 2\sin 2t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2 t\cos t + \sin 4t - 2\sin 2t)\,dt$

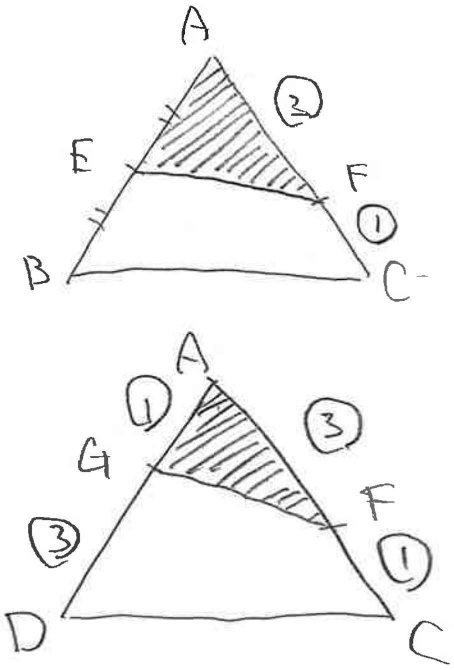
$= \left[\frac{8}{3}\sin^3 t - \frac{1}{4}\cos 4t + \cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{2}{3}}$ …(答)

2022 鳥取大 地域・農

[I]



(1)



各面は正三角形なので，1つの面の面積をSとする

$\triangle AEF = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} S = \frac{3}{8} S$

$\triangle AFG = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} S = \frac{3}{16} S$

したがって

$\triangle AEF : \triangle AFG = \frac{3}{8} S : \frac{3}{16} S = \underline{\underline{2 : 1}}$ …(答)

(2) 正四面体の1つの辺の長さを$4l$とすると，

$EF^2 = 4l^2 + 9l^2 - 2 \times 3l \times 2l \cos 60^\circ = 13l^2 - 6l^2 = 7l^2$ より

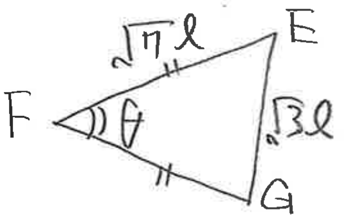
$EF = \sqrt{7} l$

$GF^2 = l^2 + 9l^2 - 2 \times l \times 3l \cos 60^\circ = 10l^2 - 3l^2 = 7l^2$ より

$GF = \sqrt{7} l$

$EG^2 = 4l^2 + l^2 - 2 \times 2l \times l \cos 60^\circ = 5l^2 - 2l^2 = 3l^2$ より

$EG = \sqrt{3} l$



$\angle EFG = \theta$ とすると

$\cos\theta = \frac{7l^2 + 7l^2 - 3l^2}{2 \times \sqrt{7}l \times \sqrt{7}l} = \frac{11}{14}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ かつ $\sin\theta > 0$ より $\sin\theta = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ なので

$\triangle EFG = \frac{1}{2} \times (\sqrt{7}l)^2 \sin\theta = \frac{1}{2} \times 7l^2 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{4} l^2$

また，$\triangle AEF = \frac{1}{2} \times 2l \times 3l \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$

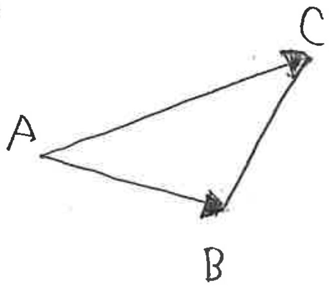
したがって

$\triangle AEF : \triangle EFG = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 : \frac{5\sqrt{3}}{4} l^2 = \underline{\underline{6 : 5}}$ …(答)

2022 鳥取大 地域・農

[II]

(1)



$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-4)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ なので

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{2\times20-4}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10-1}=\underline{\underline{3}}$ ・・・(答)

(2) 点Dは $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ でつくられる平面上にあるので

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数)

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(1,1,1)+s(1,1,0)+t(0,2,-4)$

$\overrightarrow{OD}=(s+1, s+2t+1, 1-4t)$

(i) $\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から $s+t=-1$ ・・・①

(ii) $\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から $s+10t=1$ ・・・②

①, ② より $s=-\frac{11}{9}$, $t=\frac{2}{9}$

したがって, $\underline{\underline{D\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)}}$ ・・・(答)

(3) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{9}(-2, 2, 1)$ より

$|\overrightarrow{OD}|=\frac{1}{9}\sqrt{4+4+1}=\frac{1}{9}\times3=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ ・・・(答)

(4) 求める体積をVとすると

$V=\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times|\overrightarrow{OD}|$

$=\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{3}$

$V=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ ・・・(答)

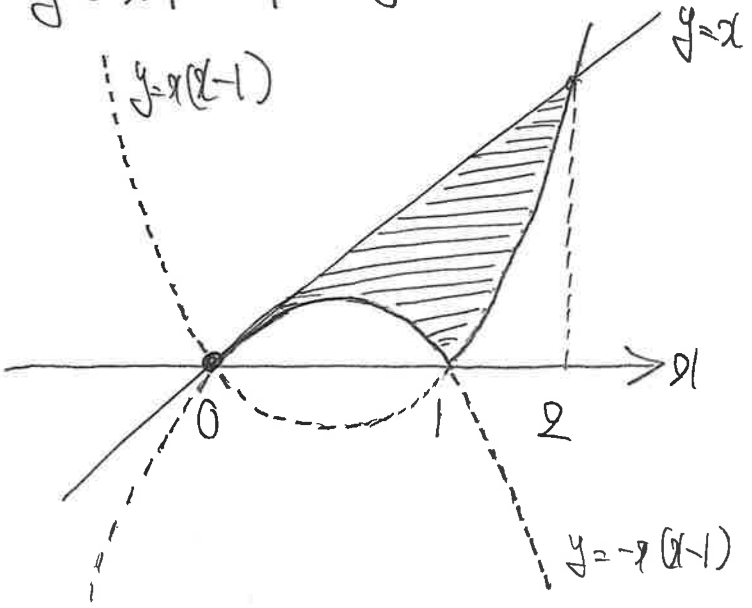
2022 鳥取大 地域・農

[III]

(i) $x-1 \geqq 0\ (x \geqq 1)$ のとき，$y = x(x-1)$

(ii) $x-1 < 0\ (x < 1)$ のとき，$y = -x(x-1)$ なので

$y = x|x-1|$ と $y = x$ で囲まれる図形は下図の斜線部分のようになる



図の斜線部分の面積を S とすると，$y = x(x-1)$ と $y = -x(x-1)$ は x 軸について対称であることを利用すると

$$S = \int_0^2 \{x - x(x-1)\}dx - 2 \times \int_0^1 \{-x(x-1) - 0\}dx$$

$$= -\int_0^2 x(x-2)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3$$

$$= \frac{8}{6} - \frac{2}{6}$$

$S = \underline{\underline{1}}$ …(答)

2022 鳥取大 地域・農

[IV]

(1) さいころを2回ふることは，1回目に6の目が出て，2回目に6以外の目が出ることだから，求める確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{36}}}\quad\cdots(答)$$

(2) さいころをk回ふることは1回目から(k−1)回目まで連続して6の目が出て，k回目に6以外の目が出ることだから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\times\frac{5}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{6^k}}}\quad\cdots(答)$$

(3) さいころをふる回数がn以下である

$\Longleftrightarrow$ さいころをふる回数が1回またはさいころをふる回数が2回または・・・またはさいころをふる回数がn回であることであり，これらはすべて互いに排反であることから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{6^k}=5\times\frac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{6}}=\underline{\underline{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}}\quad\cdots(答)$$