2022 鳥取・工 [I]

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + 5b_n & \cdots ② \end{cases}$$ とする

(1) $a_2 = 5a_1 + b_1 = 8$ $b_2 = a_1 + 5b_1 = 16$

$a_3 = 5a_2 + b_2 = 56$ $b_3 = a_2 + 5b_2 = 88$

$\therefore \underline{\underline{a_2 = 8, b_2 = 16, a_3 = 56, b_3 = 88}}$ …(答)

(2) ①+② より $a_{n+1} + b_{n+1} = 6(a_n + b_n)$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 4$、公比 6 の等比数列。 $\therefore a_n + b_n = 4 \cdot 6^{n-1}$ …③

①−② より $a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$

同様にして $a_n - b_n = -2 \cdot 4^{n-1}$ …④

$$\underline{\underline{\begin{cases} a_n + b_n = 4 \cdot 6^{n-1} \\ a_n - b_n = -2 \cdot 4^{n-1} \end{cases}}}$$ …(答)

(3) ③④より

$\underline{\underline{a_n = 2 \cdot 6^{n-1} - 4^{n-1}, b_n = 2 \cdot 6^{n-1} + 4^{n-1}}}$ …(答)

2022 鳥取大 医[I]、工[II]

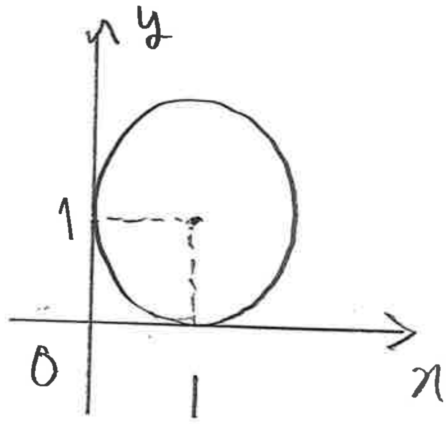
(1) $w_1 = \dfrac{\alpha + z}{i}$ から $z = iw_1 - \alpha$

$|z| = 1$ より $|iw_1 - \alpha| = 1$

$\therefore |i|\left|w_1 - \dfrac{\alpha}{i}\right| = 1$ $\therefore |w_1 - 1 - i| = 1$

よって w_1 は中心 $1+i$

半径1の円周上を動く。(右図)



(2) $w_2 = x + yi$ (x, y は実数) とおく。

$w_2\overline{\alpha} - \overline{w_2}\alpha + ki = 0$ から

$(x+yi)(-1-i) - (x-yi)(-1+i) + ki = 0$

$\therefore (-2x-2y+k)i = 0$

x, y, k は実数より $2x+2y-k=0$ …①

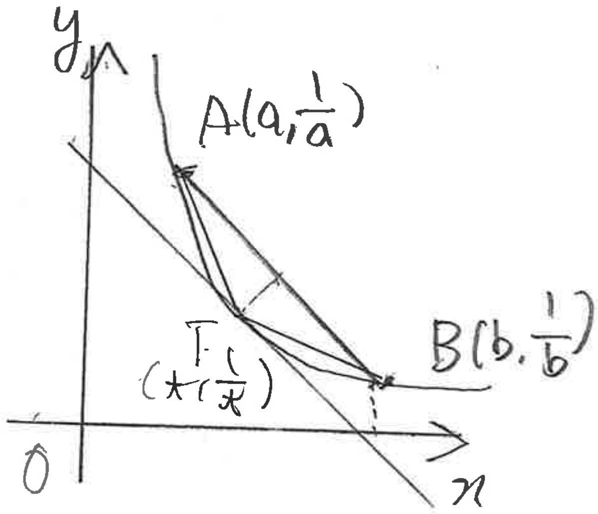
(1)より w_1 の軌跡は $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ …②

xy平面において①と②が共有点をもつ条件を考える。

$\dfrac{|2+2-k|}{\sqrt{2^2+2^2}} \leqq 1$ から $4-2\sqrt{2} \leqq k \leqq 4+2\sqrt{2}$

よって k の最大値は $\underline{\underline{4+2\sqrt{2}}}$ …(答)

2022 鳥取：医[Ⅱ]、工[Ⅲ]



(1) $f(t)$ 最大は、$\triangle ATB$ の底辺を AB とするとき 高さ最大のとき。

すなわち $y=\frac{1}{x}$ の接線で AB と平行なもものと $y=\frac{1}{x}$ との接点が T となるときである。

AB の傾きは $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\dfrac{-1}{ab}$，$y=\dfrac{1}{x}$ より $y'=\dfrac{-1}{x^2}$

$\therefore \dfrac{-1}{t^2}=\dfrac{-1}{ab}$　$ab>0$，$t>0$ より　$t=\sqrt{ab}$

ここで $0<a<b$ から $\sqrt{ab}-a=\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$b-\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$\therefore a<\sqrt{ab}<b$ となり $a<t<b$ をみたす。

$\therefore t=\sqrt{ab}$ …(答)

(2) $a=1$，$b=2$ のとき $A(1, 1)$，$B(2, \frac{1}{2})$，$T(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ である。

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

直線AB $y=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{2-1}(x-1)+1$ より $x+2y-3=0$

Tと直線ABの距離は $\dfrac{|\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

よって $M=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$ …(答)