受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

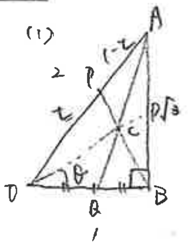
〔医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	

1

(1)



$\triangle OAB$ は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であるから、$\angle AOB = 60^\circ$.

よって、

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ = 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$ …(答)

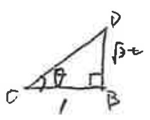
(2) 直線 OC と AB の交点を D として、$\triangle ABC$ において チェバの定理を用いると、

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{t}{1-t} = 1$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1-t}{t}$$

$AD : DB = (1-t) : t$ より

$$DB = \sqrt{3}\times\frac{t}{1-t+t} = \sqrt{3}t.$$



$OD^2 = (\sqrt{3}t)^2 + 1^2 = 3t^2 + 1$ より $OD = \sqrt{3t^2+1}$

したがって、

$$\cos\theta = \frac{OB}{OD} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3t^2+1}}}}$$ …(答)

(3).

$$\frac{1}{\cos^2\theta} - 6at = 0 \text{ より}$$

$$3t^2 + 1 - 6at = 0$$

判別式を D とし、$f(t) = 3t^2 - 6at + 1 = 3(t-a)^2 - 3a^2 + 1$ とする。

2つの解が $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$ の範囲に存在するための条件は

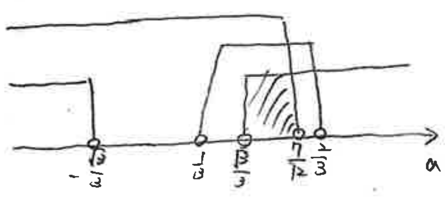
$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (-3a)^2 - 3 = 9a^2 - 3 > 0 \cdots ① \\ \text{軸 } x = a \text{ について、} \frac{1}{3} < a < \frac{2}{3} \cdots ② \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} - 2a > 0 \cdots ③,\quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}a - 4a > 0 \cdots ④ \end{cases}$$

① から $a^2 > \frac{1}{3}$ 　よって、$a < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} < a$ …⑤

③.④ を解くと　$a < \frac{2}{3}$ …⑥ , $a < \frac{7}{12}$ …⑦

②.⑤.⑥.⑦ の共通範囲を求めて

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{7}{12}}}$$ …(答)



受験番号					
1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

(1) $A_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}$ は初項1、公比 −1、項数 n の等比数列の

和なので $A_n=\dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\underline{\underline{\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}}}$ ...（答）

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k=1+(-1)2+3+\cdots+(-1)^{n-1}n$

両辺に −1 をかけて

$-S_n\quad=\quad -1+2+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)+(-1)^n n$

辺々差をとると

$2S_n=1+(-1)+1+\cdots+(-1)^{n-1}-(-1)^n n$

$=A_n-(-1)^n n$.

$=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}+(-1)^{n-1}n$

よって $\underline{\underline{S_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{4}+\dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}n}}$ ...（答）

(3) $C_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1+(-1)^{k-1}}{4}+\dfrac{1}{2}(-1)^{k-1}k\right\}$

$=\dfrac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}+\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\right\}$

$=\dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{4}n+\dfrac{1}{4}A_n+\dfrac{1}{2}S_n\right\}$

$=\dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{4}n+\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{8}+\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{8}+\dfrac{1}{4}(-1)^{n-1}n\right\}$

$=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n\{1+(-1)^{n-1}\}}{4}+\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{4}\right]$

$=\underline{\underline{\dfrac{n+1}{4n}\{1+(-1)^{n-1}\}}}$ ...（答）

受験番号					
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄	

3　$f(x) = -\log(3-2^{-x}) + x\log 2$

(1) 真数は正より、$3-2^{-x}>0$

$2^{x}>0$ だから

$$2^{x} > \frac{1}{3} \cdots ①$$

両辺を底 $e(>1)$ の対数をとると、

$$x\log 2 > -\log 3$$

したがって、 $x > -\dfrac{\log 3}{\log 2}$ ---(答)

(2). $f(x)=0$ より、 $-\log(3-2^{-x}) + x\log 2 = 0$

$$\log 2^{x} = \log(3-2^{-x})$$

$$\therefore\ 2^{x} = 3-2^{-x}$$

$$(2^{x})^2 - 3\cdot 2^{x} + 1 = 0$$

$$2^{x} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ (これは、① を満たす).

$$x\log 2 = \log\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{\log\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}{\log 2}$$ ---(答).

(3). $f(x) = \log 2^{x} - \log(3-2^{-x}) = \log\dfrac{2^{x}}{3-2^{-x}}$

$X = 3-2^{-x}$ とおくと、 $2^{-x}>0$ かつ ① より $0<X<3$ であり.

$2^{-x} = 3-X$ より $2^{x} = \dfrac{1}{3-X}$ であるから.

$$f(x) = \log\frac{\frac{1}{3-X}}{X} = \log\frac{1}{X(3-X)} = \log\frac{1}{-(X-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}} \quad (0<X<3)$$

このとき、$\log x$ のグラフは単調増加であるから、

$X=\dfrac{3}{2}$ のとき、$f(x)$ は最小となり.

$$最小値\ \log\frac{1}{\frac{9}{4}} = \log\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = -2\log\frac{3}{2}$$

となり、題意は示された。

[証明終]

受験番号

1 2 3 4 5 6

4

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

(1) $\dfrac{n+5}{n+2}=\dfrac{(n+2)+3}{n+2}=1+\dfrac{3}{n+2}$

nは自然数より $\dfrac{1}{n+2}\leqq\dfrac{1}{3}$ だから $\dfrac{3}{n+2}\leqq1$ が成り立つ

したがって，$\dfrac{n+5}{n+2}\leqq2$ が成り立つ　(証明終)

(2) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(x-ax^{n+1})dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{a}{n+2}$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[x-\frac{a}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=1-\frac{a}{n+1}$ であるから

$\displaystyle\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2-\int_0^1 xf(x)dx$

$=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{a}{n+1}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{n+2}\right)$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2a^2+\left\{\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{4}{3(n+1)}\right\}a+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2a^2-\left\{\dfrac{n+5}{3(n+1)(n+2)}\right\}a+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2\left\{a^2-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+5)(n+1)}{(n+2)}a\right\}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2\left\{a-\dfrac{(n+5)(n+1)}{4(n+2)}\right\}^2-\dfrac{(n+5)^2}{24(n+2)^2}+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2\left\{a-\dfrac{(n+5)(n+1)}{4(n+2)}\right\}^2+\dfrac{1}{24}\left\{4-\dfrac{(n+5)^2}{(n+2)^2}\right\}\geqq0$

(∵ (1)の結果より $\dfrac{n+5}{n+2}\leqq2$)

したがって，すべての実数aに対して

$\displaystyle\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2-\int_0^1 xf(x)dx\geqq0$ が成り立つ

つまり $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx\leqq\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$ が成り立つことが示せた　(証明終)

(3) (2)において，等号が成立するのは

$\dfrac{n+5}{n+2}=2$　すなわち　$n=1$ のときであり，

このとき，$\displaystyle\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\int_0^1 xf(x)dx$ が成り立ち

$\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{3}\right)$

整理すると

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$a=1$

したがって，等号が成立するときの aとn は，それぞれ

$\underline{a=1,\ n=1}$ …(答)