2023 鳥取大・医([I]), 工([II]), 地域([III])

(1) $p_n = \dfrac{{}_6C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+6}C_2} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)} \times \dfrac{(n+7)(n+6)}{12(n+1)} = \dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)}$

$\dfrac{p_n}{p_{n+1}} \leqq 1$ とすると $\dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)} \leqq 1$ より $n \leqq 5$

すなわち $1 \leqq n \leqq 4$ のとき $p_n < p_{n+1}$

$n=5$ のとき $p_5 = p_6$

$n \geqq 6$ のとき $p_n > p_{n+1}$

よって $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > \cdots$

となり、p_n は $n=5, 6$ のとき最大値 $\dfrac{6}{11}$ …(答)

(2) (i) Aから赤球1個, 白球1個で、Bから赤球1個, 白球1個取り出す確率は

$p_n \times \dfrac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)}$

(ii) Aから赤球2個で、Bから赤球1個、白球1個取り出す確率は

$\dfrac{{}_6C_2}{{}_{n+6}C_2} \times \dfrac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{16}{(n+6)(n+5)}$

$\therefore q_n = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)} + \dfrac{16}{(n+6)(n+5)} = \dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)}$

$q_n < \dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)} < \dfrac{1}{3}$

整理して $n(n-1) > 18$ 　$n(n-1)$ は $n \geqq 1$ で単調増加だから

$4 \times 3 = 12 < 18$, $5 \times 4 = 20 > 18$

よって 最小の自然数 n は $n=5$ …(答)

2023 鳥取大・医（[II]）

(1) $\cos\theta = x$ とすると，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<x<1$

$\cos 4\theta = \cos 2\times 2\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0$ より

$x + (2x^2 - 1) + (4x^3 - 3x) + (8x^4 - 8x^2 + 1) = 0$

$8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x = 0$

$\div 2x$ $\quad 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$

$(x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$

$x = -1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ $\quad 0<x<1$ より $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

したがって，$\cos\theta = \underline{\underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}}$ ・・・（答）

(2) (1) より $a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ここで，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと（$\alpha+\beta = 1$，$\alpha\beta = -1$） $a_n = \alpha^n + \beta^n$ となる

$a_{n+2} = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$

$\underline{\underline{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}}$ ・・・（答）

(3) $b_n = (-1)^n\{a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2\}$ とおくと

$b_{n+1} = (-1)^{n+1}\{a_{n+1}a_{n+3} - (a_{n+2})^2\}$

$= (-1)^{n+1}\{a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n)a_{n+2}\}$ （∵ (2) より）

$= (-1)^{n+1}\{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}\}$

$= (-1)^n\{a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2\}$

$b_{n+1} = b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は隣り合う項が等しい数列である

$b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = (-1)^1\{a_1 a_3 - (a_2)^2\}$

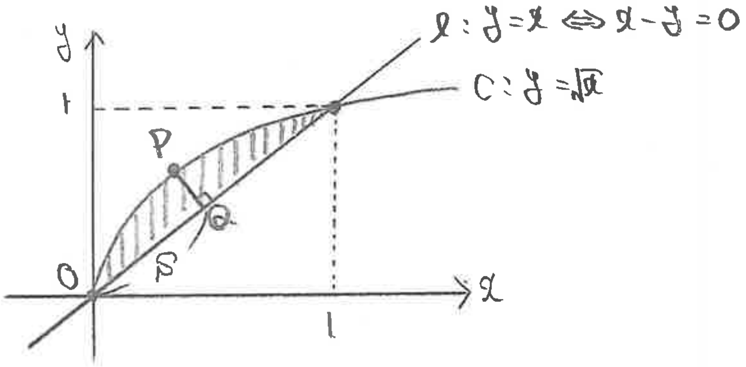
ここで $a_1 = \alpha+\beta = 1$，$a_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$，$a_3 = a_2 + a_1 = 4$ なので

$b_n = \cdots = b_1 = (-1)(4 - 3^2) = 5$

つまり，$(-1)^n\{a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2\}$ は n によらない定数（$=5$）となることが示せた

（証明終）

2023 鳥取大・医([III]), 工([IV])



(1) 囲まれる図形は,図の斜線部分,この面積を S とおく

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \quad \cdots \text{(答)}$$

(2) C 上の点 P を $(t, \sqrt{t})$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と置き直す

点と直線の距離の公式より

$$PQ = \frac{|t - \sqrt{t}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|t - \sqrt{t}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 \leqq t \leqq 1 \text{ では } \sqrt{t} \geqq t)$$

したがって,t を x に戻して,$PQ = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}}} \quad \cdots$ (答)

(3) 求める回転体の体積を V とし,$OQ = s$ とすると

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi PQ^2\,ds \quad \cdots ①$$

点Qの座標は $y = x$ と $y = -x + t + \sqrt{t}$ との交点から $Q\left(\dfrac{t+\sqrt{t}}{2}, \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$

$$s^2 = \left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}(t+\sqrt{t})^2 \text{ から } s = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+\sqrt{t}) \quad (\because 0 \leqq t \leqq 1)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \begin{array}{c|c} s & 0 \to \sqrt{2} \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$$

① と (2) から

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{t} + 1}{2\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \int_0^1 \frac{(t^2 - 2t\sqrt{t} + t)(2\sqrt{t} + 1)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \int_0^1 (t\sqrt{t} - 2t + \sqrt{t})(2\sqrt{t} + 1)\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \int_0^1 (2t^2 - 3t\sqrt{t} + \sqrt{t})\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

$$V = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}} \quad \cdots \text{(答)}$$

2023 鳥取大・医([Ⅳ])

(1) $I_0=\int_0^x e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x=\underline{\underline{-e^{-x}+1}}$ …(答)

$I_1=\int_0^x te^{-t}dt=\left[t(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})dt$

$=-xe^{-x}+\left[-e^{-t}\right]_0^x=\underline{\underline{-(x+1)e^{-x}+1}}$ …(答)

(2) $I_n=\left[t^n(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}(-e^{-t})dt$

$=-x^ne^{-x}+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$=-x^ne^{-x}+n\cdot I_{n-1}$

$\therefore\ \underline{\underline{I_n=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}}}$ …(答)

(3) $J_n=\frac{1}{n!}I_n$ とおくと (2) より

$J_n=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+\frac{1}{(n-1)!}I_{n-1}=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+J_{n-1}$

これをくり返し用いて

$J_n=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}+J_{n-2}$

$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}-\cdots-\frac{x}{1!}e^{-x}+J_0$

$=-\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+x+1\right)e^{-x}+1$

$=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

ゆえに

$I_n=n!J_n=\underline{\underline{n!\left(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)}}$ …(答)