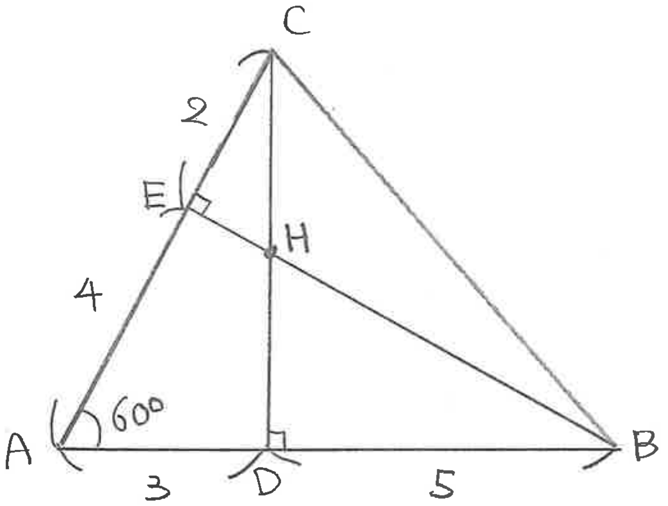
2023 鳥取大・工([Ⅰ]), 地域([Ⅱ])



図のように，点D，Eをとる．

$$\begin{cases} AD = AC\cos 60^\circ = 3 \\ AE = AB\cos 60^\circ = 4 \end{cases}$$ より

$DB = 5$，$EC = 2$ となる

3点 C，H，D は同一直線上にあるので，

$\overrightarrow{CH} = t\overrightarrow{CD}$ （t：実数） $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + t(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{8}t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ …①

また，3点 B，H，E は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{BH} = s\overrightarrow{BE}$ （s：実数） $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + s(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AH} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{AC}$ …②

①，②より $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ なので

$$\begin{cases} 1 - s = \frac{3}{8}t \Leftrightarrow 3t + 8s = 8 \quad \cdots ③ \\ \frac{2}{3}s = 1 - t \Leftrightarrow 3t + 2s = 3 \quad \cdots ④ \end{cases}$$

③，④より $s = \frac{5}{6}$，$t = \frac{4}{9}$

したがって，$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ …(答)

2023 鳥取大・医([Ⅰ]), 工([Ⅱ]), 地域([Ⅲ])

(1) $p_n = \dfrac{{}_6C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+6}C_2} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)} \times \dfrac{(n+7)(n+6)}{12(n+1)} = \dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)}$

$\dfrac{p_n}{p_{n+1}} \leqq 1$ とすると $\dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)} \leqq 1$ より $n \leqq 5$

すなわち $1 \leqq n \leqq 4$ のとき $p_n < p_{n+1}$

$n=5$ のとき $p_5 = p_6$

$n \geqq 6$ のとき $p_n > p_{n+1}$

よって $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > \cdots$

となり, p_n は $n=5, 6$ のとき最大値 $\dfrac{6}{11}$ …(答)

(2) (i) Aから赤球1個, 白球1個で, Bから赤球1個, 白球1個取り出す確率は

$p_n \times \dfrac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)}$

(ii) Aから赤球2個で, Bから赤球1個, 白球1個取り出す確率は

$\dfrac{{}_6C_2}{{}_{n+6}C_2} \times \dfrac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{16}{(n+6)(n+5)}$

$\therefore q_n = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)} + \dfrac{16}{(n+6)(n+5)} = \dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)}$

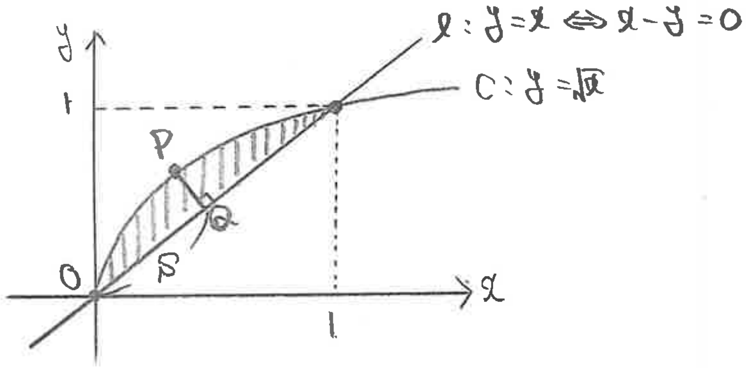
$q_n < \dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)} < \dfrac{1}{3}$

整理して $n(n-1) > 18$ $n(n-1)$ は $n \geqq 1$ で単調増加だから

$4 \times 3 = 12 < 18$, $5 \times 4 = 20 > 18$

よって 最小の自然数 n は $n=5$ …(答)

2023 鳥取大・医([III])，工([III])



(1) 囲まれる図形は，図の斜線部分，この面積をSとおく

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}\quad\cdots(答)$$

(2) C上の点Pを$(t,\sqrt{t})$ $(0\leqq t\leqq 1)$と置き直す

点と直線の距離の公式より

$$PQ=\frac{|t-\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t-\sqrt{t}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{2}}\quad(\because 0\leqq t\leqq 1 \text{ では } \sqrt{t}\geqq t)$$

したがって，tをxに戻して，　$PQ=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}}}\quad\cdots(答)$

(3) 求める回転体の体積をVとし，$OQ=s$とすると

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi PQ^2\,ds\quad\cdots①$$

点Qの座標は $y=x$ と $y=-x+t+\sqrt{t}$ との交点から $Q\left(\dfrac{t+\sqrt{t}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$

$$s^2=\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)^2+\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}(t+\sqrt{t})^2 \text{ から } s=\frac{\sqrt{2}}{2}(t+\sqrt{t})\quad(\because 0\leqq t\leqq 1)$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

s	0 → $\sqrt{2}$
t	0 → 1

①と(2)から

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\int_0^1\frac{(t^2-2t\sqrt{t}+t)(2\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\int_0^1(t\sqrt{t}-2t+\sqrt{t})(2\sqrt{t}+1)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\int_0^1(2t^2-3t\sqrt{t}+\sqrt{t})\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\right)$$

$$V=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}}\quad\cdots(答)$$

2023 鳥取大・工（[IV]）

(1) $I_0=\frac{1}{0!}\int_0^x t^0e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x=\underline{\underline{-e^{-x}+1}}$ …(答)

$I_1=\frac{1}{1!}\int_0^x te^{-t}dt=\left[t(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})dt$

$=-xe^{-x}+\left[-e^{-t}\right]_0^x=\underline{\underline{-(x+1)e^{-x}+1}}$ …(答)

(2) $I_n=\frac{1}{n!}\left[t^n(-e^{-t})\right]_0^x-\frac{1}{n!}\int_0^x nt^{n-1}(-e^{-t})dt$

$=\frac{-1}{n!}x^ne^{-x}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+I_{n-1}$

$\therefore\ \underline{\underline{I_n=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+I_{n-1}}}$ …(答)

(3) (2)をくり返し用いて

$I_n=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}+I_{n-2}$

$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\cdots-\frac{x^1}{1!}e^{-x}+I_0$

$=-\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^1}{1!}+1\right)e^{-x}+1$

$=\underline{\underline{1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}}$ …(答)