受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部医学科
総合理工学部数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄	

1

(1) ユークリッドの互除法より、

$$54321 = 12345 \times 4 + 4941$$
$$12345 = 4941 \times 2 + 2463$$
$$4941 = 2463 \times 2 + 15$$
$$2463 = 15 \times 164 + 3$$
$$15 = 3 \times 5$$

よって、最大公約数は、3 …(答)

(2) $m > n$ のとき、

$$a_m - a_n = (1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}+10^n+\cdots+10^{m-1}) - (1+10+10^2+\cdots+10^{n-1})$$
$$= 10^n+\cdots+10^{m-1} = 10^n(1+10+\cdots+10^{m-n-1}) = 10^n \sum_{k=0}^{m-n-1} 10^k$$
$$= 10^n a_{m-n}$$

[証明終]

(3) $m > n$ のとき、(2)の結果より $a_m = a_n + 10^n a_{m-n}$ であり、

題意より、すべての自然数 n に対し、a_n と 10 は互いに素であるから、

$$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(10^n a_{m-n}, a_n) = \gcd(a_n, a_{m-n})$$ [証明終]

(4) 以下、$m, n, r_1, r_2, \cdots, g_2, g_3, \cdots$ の記号は、条件文の枠で囲まれた説明文の記号とする。

$$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(a_{ng_2+r_2}, a_n) = \gcd(a_{n(g_2-1)+r_2}, a_n)$$ (∵(3)より繰り返し用いて)

$$= \cdots = \gcd(a_n, a_{r_2}) = \gcd(a_{r_2g_3+r_3}, a_{r_2})$$ (同様にして)

$$= \cdots = \gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_kg_k}, a_{r_k})$$

$$= \gcd(a_{dg_k}, a_d)$$ (∵ m と n の最大公約数が d より、$r_k = d$)

$$= \gcd(a_{d(g_k-1)}, a_d) = \cdots = \gcd(a_d, a_d)$$

$$= a_d$$

[証明終]

(5) (1)の結果と(4)より

$$\gcd(a_{54321}, a_{12345}) = a_3 = 1+10+10^2 = 111$$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

採点欄

2

(1) 円C_1：$x^2+y^2-4ax-2ay=5-10a$ が原点$(0,0)$を通るので

$0=5-10a$　よって $a=\frac{1}{2}$

このとき円C_1は、$x^2+y^2-2x-y=0$

$(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$

よって 円C_1の中心は $(1,\frac{1}{2})$、半径は$\frac{\sqrt{5}}{2}$ …(答)

(2) 円C_1は　$(x^2+y^2-5)-2a(2x+y-5)=0$ なので

円C_1は aの値にかかわらず

$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \cdots ① \\ 2x+y-5=0 \cdots ② \end{cases}$ をみたす点を通る

②より $y=-2x+5$

①に代入して $x^2+(-2x+5)^2-5=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$　このとき $y=1$

よって 定点Aの座標は $(2,1)$ …(答)

(3) 円C_2と円C_3の交点を通る円の方程式は

$(x^2+y^2-10)+k(x^2+y^2-8x-6y+10)=0$　とおける

これが原点$(0,0)$を通るので

$-10+10k=0$　よって $k=1$

求める円の方程式は

$(x^2+y^2-10)+(x^2+y^2-8x-6y+10)=0$

$x^2+y^2-4x-3y=0$

$(x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$

円の中心の座標は $(2,\frac{3}{2})$、半径は $\frac{5}{2}$ …(答)

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $C_2 = P(1,2) + P(2,2) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ …(答)

$C_3 = P(1,3) + P(2,3) + P(3,3) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$ …(答)

(2) コインを$k+1$回投げて、得点の合計が$n+2$となるのは次の2つの場合

(i) コインをk回投げて得点の合計が$n+1$のとき、$k+1$回目に表が出る

(ii) コインをk回投げて得点の合計がnのとき、$k+1$回目に裏が出る

よって $\underline{\underline{P(k+1, n+2) = \frac{1}{2}P(k, n+1) + \frac{1}{2}P(k, n)}}$ …(答)

(3) $C_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} P(k, n+2) = P(1, n+2) + \sum_{k=1}^{n+1} P(k+1, n+2)$

$= 0 + \sum_{k=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{2}P(k, n+1) + \frac{1}{2}P(k, n)\right\}$ ((2)より)

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(k, n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(k, n) + \frac{1}{2}P(n+1, n)$

$= \frac{1}{2}C_{n+1} + \frac{1}{2}C_n + \frac{1}{2} \times 0$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}C_{n+1} + \frac{1}{2}C_n}}$ …(答)

(4) (3)より $C_{n+2} - \alpha C_{n+1} = \beta(C_{n+1} - \alpha C_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)C_{n+1} + \frac{1}{2}C_n = \beta C_{n+1} - \alpha\beta C_n$

これが $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して成り立つのは $\frac{1}{2} - \alpha = \beta$ かつ $\frac{1}{2} = -\alpha\beta$

すなわち $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ かつ $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ が成り立つときで、α, βはtの2次方程式$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$の

解である. これは $2t^2 - t - 1 = 0$ $(2t+1)(t-1) = 0$ より $t = -\frac{1}{2}, 1$

よって $(\alpha, \beta) = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)}}$ …(答)

(5) (4)より $C_{n+2} + \frac{1}{2}C_{n+1} = C_{n+1} + \frac{1}{2}C_n$ …① $C_{n+2} - C_{n+1} = -\frac{1}{2}(C_{n+1} - C_n)$ …②

①より $C_{n+1} + \frac{1}{2}C_n = C_3 + \frac{1}{2}C_2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 1$ …③

②より $C_{n+1} - C_n = (C_3 - C_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ …④

③−④より $\frac{3}{2}C_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ よって $\underline{\underline{C_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}}$ …(答)

数学　解答用紙

採点欄 **4**

(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおく

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1$

$x > 0$ における増減表は，次のようになる

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗

$x > 0$ において $f(x) \geqq 2 > 0$ が成り立つ

つまり $2\sqrt{x} > \log x$ は成り立つ

(2) $x \geqq e$ として考えると (1) より

$1 \leqq \log x < 2\sqrt{x}$

$x > 0$ より $x+1 > 0$ だから

$\dfrac{1}{x+1} \leqq \dfrac{\log x}{x+1} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}} = 0$ より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x+1} = \underline{0}$ …(答)

(3) $\dfrac{\log x}{x+1} \leqq \log \dfrac{ax}{x+1}$ より

$\dfrac{\log x}{x+1} \leqq \log a + \log x - \log(x+1)$

$\log(x+1) + \left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right)\log x \leqq \log a$

$\log(x+1) - \dfrac{x}{x+1}\log x \leqq \log a$

$g(x) = \log(x+1) - \dfrac{x\log x}{x+1}$ とおく

ここで $(x\log x)' = 1\times\log x + x\times\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ から

$g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{(\log x+1)(x+1) - x\log x}{(x+1)^2}$

$g'(x) = \dfrac{x+1-\{\log x + (x+1)\}}{(x+1)^2} = \dfrac{-\log x}{(x+1)^2}$

$g'(x) = 0$ とすると $x = 1$

このとき，$x > 0$ における増減表は，次のようになる

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	$\log 2$	↘

$g(x) \leqq \log a$ から

$g(x)$ の最大値より $\log a$ が上にあればよい

したがって，$\log 2 \leqq \log a$

底が1より大きいので $\underline{2 \leqq a}$ …(答)

(4) (左辺) $= \displaystyle\int_1^2 \{\log ax - \log(x+1)\}\,dx$

$= \Big[x\log ax - x - (x+1)\log(x+1) + (x+1)\Big]_1^2$

$= \log \dfrac{16}{27}a$ …①

(右辺) $= 2\displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

$= 2\left[-\dfrac{1}{x}\log x - \dfrac{1}{x}\right]_1^2$

$= -\log 2 + 1$ …②

①，②より

$\log \dfrac{16}{27}a = -\log 2 + 1$

$\log \dfrac{32}{27}a = 1$

$\dfrac{32}{27}a = e$

$a = \underline{\underline{\dfrac{27}{32}e}}$ …(答)