数学 解答用紙

〔物理・マテリアル工学科，物質化学科
地球科学科，知能情報デザイン学科
機械・電気電子工学科，建築デザイン学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄

1

(1) ユークリッドの互除法より.

$$54321 = 12345 \times 4 + 4941$$
$$12345 = 4941 \times 2 + 2463$$
$$4941 = 2463 \times 2 + 15$$
$$2463 = 15 \times 164 + 3$$
$$15 = 3 \times 5$$

よって. 最大公約数は. 3 …(答)

(2) $m > n$ のとき.

$$a_m - a_n = (1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}+10^n+\cdots+10^{m-1}) - (1+10+10^2+\cdots+10^{n-1})$$
$$= 10^n+\cdots+10^{m-1} = 10^n(1+10+\cdots+10^{m-n-1}) = 10^n\sum_{k=0}^{m-n-1}10^k$$
$$= 10^n a_{m-n}$$

[証明終]

(3) $m > n$ のとき. (2)の結果より $a_m = a_n + 10^n a_{m-n}$ であり.
題意より. すべての自然数 n に対し. a_n と 10 は互いに素であるから.

$$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(10^n a_{m-n}, a_n) = \gcd(a_n, a_{m-n}).$$

[証明終]

(4) 以下, $m, n, r_1, r_2, \cdots, g_2, g_3, \cdots$ の記号は、条件文の枠で囲まれた説明文の記号とする。

$$\gcd(a_m, a_n) = \gcd(a_{ng_2+r_2}, a_n) = \gcd(a_{n(g_2-1)+r_2}, a_n)$$ (∵(3)より繰り返し用いて)
$$= \cdots = \gcd(a_n, a_{r_2}) = \gcd(a_{r_2g_3+r_3}, a_{r_2})$$ (同様にして)
$$= \cdots = \gcd(a_{r_{k-1}}, a_{r_k}) = \gcd(a_{r_kg_k}, a_{r_k})$$
$$= \gcd(a_{dg_k}, a_d)$$ (∵ m と n の最大公約数が d より, $r_k = d$)
$$= \gcd(a_{d(g_k-1)}, a_d) = \cdots = \gcd(a_d, a_d)$$
$$= a_d$$

[証明終]

(5) (1)の結果と(4)より

$$\gcd(a_{54321}, a_{12345}) = a_3 = 1+10+10^2 = 111$$ …(答)

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2 (1) 直線の式より $y=2x+k$
これを双曲線の式に代入して
$x^2-(2x+k)^2=1$
これより $3x^2+4kx+k^2+1=0$ …①
双曲線と直線が異なる2点で交わることと①が異なる2つの実数解をもつことは同値であるから
①の判別式をDとすると $\frac{D}{4}=4k^2-3(k^2+1)=k^2-3>0$
よって求める k の値の範囲は $k<-\sqrt{3}, \sqrt{3}<k$ …(答)

(2) ①の2つの解を α, β とすると
点Rの x 座標は $\frac{\alpha+\beta}{2}$ である.
y 座標は $2\times\frac{\alpha+\beta}{2}+k=\alpha+\beta+k$ である.
ここで解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\frac{4k}{3}$ であるから
$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{2k}{3}$　$\alpha+\beta+k=-\frac{k}{3}$ である。
よって求める点Rの座標は $\left(-\frac{2k}{3}, -\frac{k}{3}\right)$ …(答)

(3) R (x, y) とすると
$x=-\frac{2k}{3}$, $y=-\frac{k}{3}$ である。
ここで $k<-\sqrt{3}, \sqrt{3}<k$ であるから $x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}<x$ である。
$x=-\frac{2k}{3}$ より $k=-\frac{3}{2}x$ である。
これを y の式に代入して $y=\frac{1}{2}x$ である。
よって求める点Rの軌跡は
直線 $y=\frac{1}{2}x$ の $x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}<x$ の部分 …(答)

受	験	番	号		
1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = \underline{\underline{-x\cos x + \sin x + C}}$ …(答)

(Cは積分定数)

$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx$

$= \underline{\underline{(-x^2+2)\cos x + 2x\sin x + C}}$ …(答)

(Cは積分定数)

(2) $f(x) = (x^2+2)\sin x + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)\,dt$ …①

$g(x) = (-2x+\pi)\sin x + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$ …②　とする。

このとき，$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)\,dt$ …③，$b = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$ …④　とおくと，

①，②は，

$f(x) = (x^2+2)\sin x + a$

$g(x) = (-2x+\pi)\sin x + b$

となり，③より　$2\pi a = \int_0^\pi \{(-2t+\pi)\sin t + b\}\,dt$

$= \Big[(2t-\pi)\cos t - 2\sin t + bt\Big]_0^\pi$　(∵(1)より)

$= \pi b$

よって，

$\therefore\ b = 2a$ …⑤

また，④より　$2\pi b = \int_0^\pi \{(t^2+2)\sin t + a\}\,dt$

$= \Big[-t^2\cos t + 2t\sin t + at\Big]_0^\pi$　(∵(1)より)

$= \pi^2 + a\pi$

よって　$\therefore\ 2b = a + \pi$ …⑥

⑤，⑥より，　$a = \frac{1}{3}\pi$，$b = \frac{2}{3}\pi$

したがって，

$\underline{\underline{f(x) = (x^2+2)\sin x + \frac{1}{3}\pi,\quad g(x) = (-2x+\pi)\sin x + \frac{2}{3}\pi}}$ …(答)