2021 鳥取大・工

[I]

(1) $n=6$ のとき，2進法では 110 のため，$a_6 = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$ …(答)

$n=7$ のとき，2進法では 111 のため，$a_7 = 1\times\frac{1}{2} + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$ …(答)

$n=8$ のとき，2進法では 1000 のため，$a_8 = 0\times\frac{1}{2} + 0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$ …(答)

$n=9$ のとき，2進法では 1001 のため，$a_9 = 1\times\frac{1}{2} + 0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$ …(答)

(2) $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ のとき，$D(n) = k+1$ なので

$a_n = b_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ であるから

$a_{n-2^k} = b_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\underline{\underline{a_n = a_{n-2^k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}}$ …(答)

(3) $2^7 \leqq 130 < 2^8$ に含まれる。$2^{k-1} \leqq n < 2^k$ に含まれる和を T_{2^k} と表す

$1 \leqq n < 2$ のとき，$T_2 = \frac{1}{2}$

$2 \leqq n < 4$ のとき，$T_4 = \frac{1+3}{4} = 1$

$4 \leqq n < 8$ のとき，$T_8 = \frac{1+3+5+7}{8} = \frac{4(1+7)}{8\times2} = 2$

$8 \leqq n < 16$ のとき，$T_{16} = \frac{1+3+\cdots+15}{16} = \frac{8(1+15)}{16\times2} = 4$

$16 \leqq n < 32$ のとき，$T_{32} = \frac{1+3+\cdots+31}{32} = \frac{16(1+31)}{32\times2} = 8$

$32 \leqq n < 64$ のとき，$T_{64} = \frac{1+3+\cdots+63}{64} = \frac{32(1+63)}{64\times2} = 16$

$64 \leqq n < 128$ のとき，$T_{128} = \frac{1+3+\cdots+127}{128} = \frac{64(1+127)}{128\times2} = 32$

(2) より

$a_{128} = a_{128-2^7} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$，$a_{129} = a_{129-2^7} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^8$

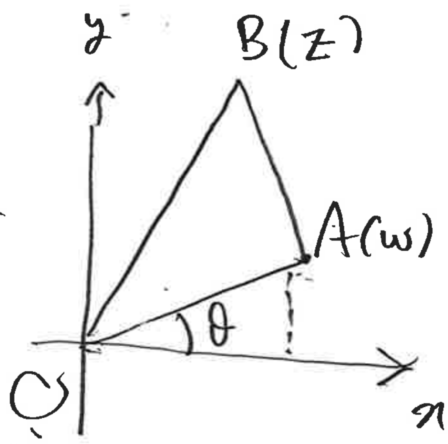
$a_{130} = a_{130-2^7} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^8$ なので

$S_{130} = \sum_{i=0}^{130} a_i = 0 + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$= \frac{3 + 64 + 16384}{256}$

$= \underline{\underline{\frac{16451}{256}}}$ …(答)

2021 鳥取 医[Ⅱ], 工[Ⅱ]



(1) $\omega=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\le\theta<2\pi)$ とおく

$$z=\frac{\omega}{\omega+1}$$
$$=\frac{\sqrt3\cos\theta+\sqrt3\sin\theta\cdot i}{(\sqrt3\cos\theta+1)+\sqrt3\sin\theta\cdot i}\times\frac{(\sqrt3\cos\theta+1)-\sqrt3\sin\theta\, i}{(\sqrt3\cos\theta+1)-\sqrt3\sin\theta\, i}$$
$$=\frac{\sqrt3\cos\theta+3}{2\sqrt3\cos\theta+4}+\frac{\sqrt3\sin\theta}{2\sqrt3\cos\theta+4}i$$ であるから

$$S=\frac12\left|\sqrt3\cos\theta\times\frac{\sqrt3\sin\theta}{2\sqrt3\cos\theta+4}-\sqrt3\sin\theta\times\frac{\sqrt3\cos\theta+3}{2\sqrt3\cos\theta+4}\right|$$
$$=\frac12\cdot\frac{|3\sqrt3\sin\theta|}{2\sqrt3\cos\theta+4}$$

ここで $\omega+\overline{\omega}=2\sqrt3\cos\theta$, $\omega-\overline{\omega}=2\sqrt3\sin\theta$ から

$$S=\frac12\times\frac{\left|3\times\frac{\omega-\overline{\omega}}{2}\right|}{\omega+\overline{\omega}+4}=\underline{\underline{\frac{3|\omega-\overline{\omega}|}{4(\omega+\overline{\omega}+4)}}}\cdots(答)$$

(2) (1)より $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\sqrt3\cos\theta+2}$ とおくと $S=\frac{3\sqrt3}{4}|f(\theta)|$

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta(\sqrt3\cos\theta+2)-\sin\theta\cdot(-\sqrt3\sin\theta)}{(\sqrt3\cos\theta+2)^2}$$
$$=\frac{2\cos\theta+\sqrt3}{(\sqrt3\cos\theta+2)^2}$$

$f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=\frac{-\sqrt3}{2}$, $0\le\theta<2\pi$ より $\theta=\frac56\pi, \frac76\pi$

θ	0	$\cdots$	$\frac56\pi$	$\cdots$	$\frac76\pi$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

増減表より $|f(\theta)|$ は $\theta=\frac56\pi, \frac76\pi$ で最大値 1 で $S=\frac{3\sqrt3}{4}$

$\theta=\frac56\pi$ のとき $\omega=\sqrt3\left(\cos\frac56\pi+i\sin\frac56\pi\right)=\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$ から $\omega+1=\cos\frac23\pi+i\sin\frac23\pi$

$\frac{OB}{OA}=\frac{|z|}{|\omega|}=\frac{1}{|\omega+1|}=1$, $\angle AOB=\left|\arg\frac{z}{\omega}\right|=|-\arg(\omega+1)|=\frac23\pi$

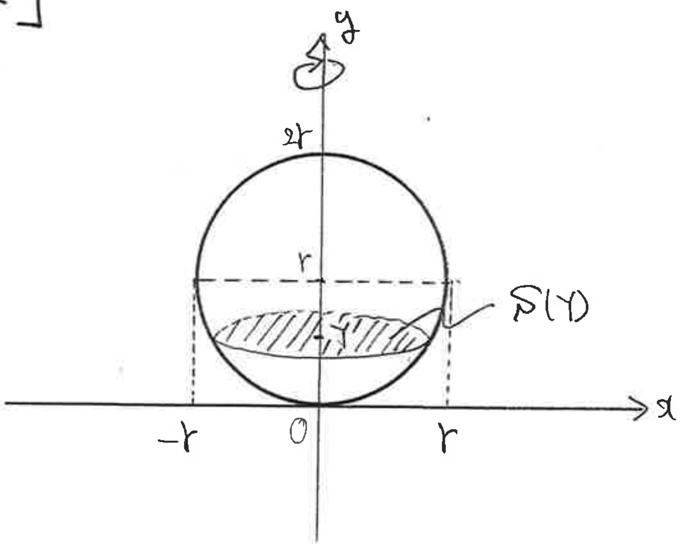
$\theta=\frac76\pi$ のときも同様である。

よって S の最大値は $\underline{\frac{3\sqrt3}{4}}$、$\triangle OAB$ は $\underline{OA=OB, \angle AOB=\frac23\pi\text{ の二等辺三角形}}\cdots$(答)

2021 鳥取大・工

[III]

(1)



左図のように、設定すると、

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

$y=Y$ で切り取った図形を y 軸のまわりに回転してできる面積を $S(Y)$ とする。

$$S(Y)=\pi\{r^2-(Y-r)^2\}$$

$$S(Y)=\pi(2rY-Y^2)$$

$Y=h$ としたときの面積が S なので $S=\underline{\underline{\pi(2rh-h^2)}}$ …(答)

$$V=\int_0^h S(Y)\,dY=\pi\int_0^h(2rY-Y^2)\,dY=\pi\left[rY^2-\frac{Y^3}{3}\right]_0^h$$

$V=\underline{\underline{\pi\left(rh^2-\dfrac{h^3}{3}\right)}}$ …(答)

(2) $V=\displaystyle\int_0^h S(Y)\,dY$ の両辺を t (単位時間) について微分すると

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dh}{dt}\times\dfrac{d}{dh}\displaystyle\int_0^h S(Y)\,dY$ であり $\dfrac{d}{dh}\displaystyle\int_0^h S(Y)\,dY=S$ であることと、$\dfrac{dV}{dt}=a$ より

$$\frac{dh}{dt}=\frac{a}{\pi(2rh-h^2)}$$

$h=\dfrac{r}{2}$ のとき $\dfrac{dh}{dt}=v_1$ なので　　$v_1=\underline{\underline{\dfrac{4a}{3\pi r^2}}}$ …(答)

$S=\pi(2rh-h^2)$ の両辺を t について微分すると

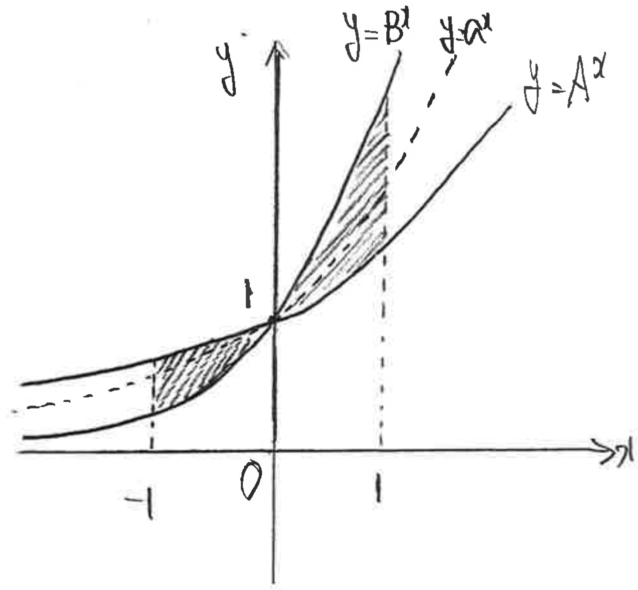
$$\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\{\pi(2rh-h^2)\}=\frac{dh}{dt}\times\frac{d}{dh}\{\pi(2rh-h^2)\}=\frac{dh}{dt}\{\pi(2r-2h)\}$$

$h=\dfrac{r}{2}$ のとき、$\dfrac{dS}{dt}=v_2$，$\dfrac{dh}{dt}=v_1$ なので

$v_2=\dfrac{4a}{3\pi r^2}\times\pi r=\underline{\underline{\dfrac{4a}{3r}}}$ …(答)

2021 鳥取大・工

[IV]



(1) $f'(x) = a^x \log a$ …(答)

(2) $1 < A \leqq a \leqq B$ より 右図のようになる

求める面積を S とすると、

$$S = \int_{-1}^{0} (A^x - B^x)\,dx + \int_{0}^{1} (B^x - A^x)\,dx$$

$$= \left[\frac{A^x}{\log A} - \frac{B^x}{\log B} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{B^x}{\log B} - \frac{A^x}{\log A} \right]_{0}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\log A} - \frac{1}{\log B} \right) - \left(\frac{A^{-1}}{\log A} - \frac{B^{-1}}{\log B} \right) + \left(\frac{B}{\log B} - \frac{A}{\log A} \right)$$

$$= -\frac{A^2 - 2A + 1}{A \log A} + \frac{B^2 - 2B + 1}{B \log B}$$

$$S = \frac{(B-1)^2}{B \log B} - \frac{(A-1)^2}{A \log A}$$ …(答)