2022 鳥取・医[III]、工[IV]

(1) $f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t$

$= 2\cos t(1 - 2\sin t)$

$f'(t)=0$ は $\cos t = 0$ または $\sin t = \frac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

増減表より $f(t)$ の最大値は

$t = \frac{\pi}{6}$ のとき $\underline{\frac{1}{2}}$ …(答)

(2) $y = 1 - \cos 2t = 1$ のとき $\cos 2t = 0$

$0 \leqq 2t \leqq \pi$ から $2t = \frac{\pi}{2}$ $\therefore t = \frac{\pi}{4}$

このとき $x = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 1 = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin 2t}{2\cos t(1 - 2\sin t)} = \frac{2\sin t}{1 - 2\sin t}$$ より

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2-\sqrt{2}$$

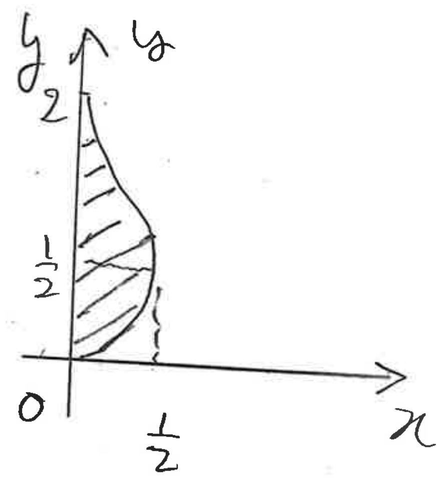
よって求める接線は $y = -(2+\sqrt{2})(x - \sqrt{2} + 1) + 1$

$\therefore \underline{y = -(2+\sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1}$ …(答)

(3) $\frac{dy}{dt} = 2\sin 2t$

増減表より求める面積は図の斜線部

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2



$S = \int_0^2 x\,dy$ $\quad dy = 2\sin 2t\,dt$

y	$0 \to 2$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t + \cos 2t - 1)\cdot 2\sin 2t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2 t\cos t + \sin 4t - 2\sin 2t)\,dt$$

$$= \left[\frac{8}{3}\sin^3 t - \frac{1}{4}\cos 4t + \cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{2}{3}}$$ …(答)

2022 鳥取・工 [I]

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + 5b_n & \cdots ② \end{cases}$$ とする

(1) $a_2 = 5a_1 + b_1 = 8$　$b_2 = a_1 + 5b_1 = 16$

$a_3 = 5a_2 + b_2 = 56$　$b_3 = a_2 + 5b_2 = 88$

$\therefore$ $\underline{\underline{a_2 = 8,\ b_2 = 16,\ a_3 = 56,\ b_3 = 88}}$ …(答)

(2) ①+② より $a_{n+1} + b_{n+1} = 6(a_n + b_n)$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 4$、公比 6 の等比数列。$\therefore$ $a_n + b_n = 4 \cdot 6^{n-1}$ …③

①−② より $a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$

同様にして　$a_n - b_n = -2 \cdot 4^{n-1}$ …④

$$\begin{cases} a_n + b_n = 4 \cdot 6^{n-1} \\ a_n - b_n = -2 \cdot 4^{n-1} \end{cases}$$ …(答)

(3) ③④より

$\underline{\underline{a_n = 2 \cdot 6^{n-1} - 4^{n-1},\ b_n = 2 \cdot 6^{n-1} + 4^{n-1}}}$ …(答)

2022 鳥取大 医 [5]、工 [II]

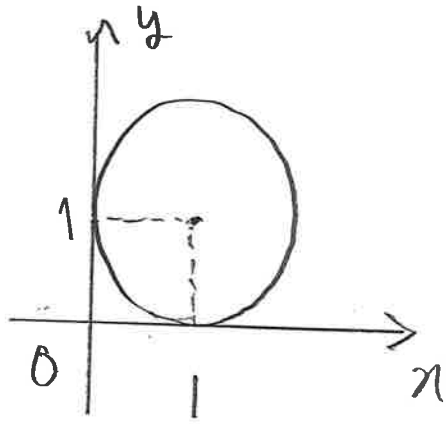
(1) $w_1=\dfrac{\alpha+z}{i}$ から $z=iw_1-\alpha$

$|z|=1$ より $|iw_1-\alpha|=1$

$\therefore |i|\left|w_1-\dfrac{\alpha}{i}\right|=1$ $\therefore |w_1-1-i|=1$

よって w_1 は中心 $1+i$

半径1の円周上を動く。(右図)



(2) $w_2=x+yi$ (x, y は実数) とおく。

$w_2\overline{\alpha}-\overline{w_2}\alpha+ki=0$ から

$(x+yi)(-1-i)-(x-yi)(-1+i)+ki=0$

$\therefore (-2x-2y+k)i=0$

x, y, k は実数より $2x+2y-k=0$ …①

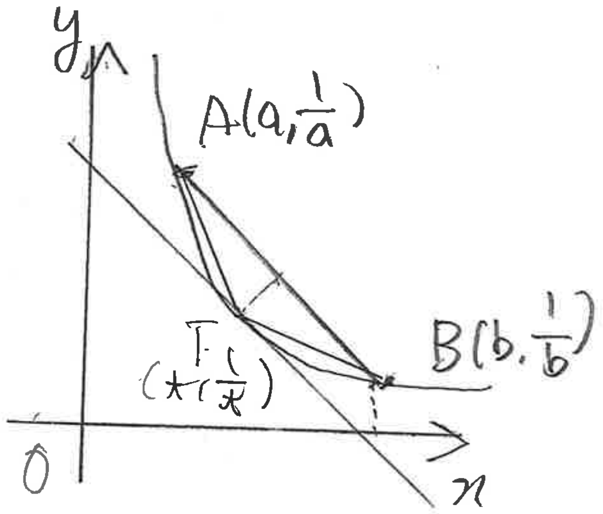
(1)より w_1 の軌跡は $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ …②

xy 平面において ①と②が共有点をもつ条件を考える。

$\dfrac{|2+2-k|}{\sqrt{2^2+2^2}}\leqq 1$ から $4-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 4+2\sqrt{2}$

よって k の最大値は $\underline{\underline{4+2\sqrt{2}}}$ …(答)

2022 鳥取・医[Ⅱ]、工[Ⅲ]



(1) $f(t)$ 最大は、$\triangle ATB$ の底辺を AB とするとき 高さ最大のとき。

すなわち $y=\frac{1}{x}$ の接線で AB と平行なもの ものと $y=\frac{1}{x}$ との接点が T となるときである。

AB の傾きは $\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\frac{-1}{ab}$，$y=\frac{1}{x}$ より $y'=\frac{-1}{x^2}$

$\therefore \frac{-1}{t^2}=\frac{-1}{ab}$　$ab>0$，$t>0$ より $t=\sqrt{ab}$

ここで $0<a<b$ から $\sqrt{ab}-a=\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$b-\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$\therefore a<\sqrt{ab}<b$ となり $a<t<b$ をみたす。

$\therefore \underline{\underline{t=\sqrt{ab}}}$ …(答)

(2) $a=1$，$b=2$ のとき $A(1, 1)$，$B(2, \frac{1}{2})$，$T(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ である。

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

直線AB $y=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}(x-1)+1$ より $x+2y-3=0$

T と直線ABの距離は $\frac{|\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

よって $M=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}}}$ …(答)