2022 鳥取大 医 [I]、工 [II]

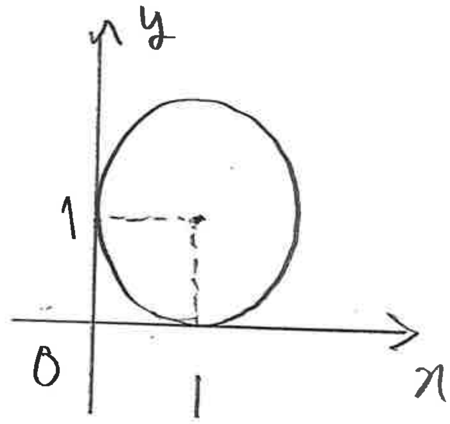
(1) $w_1 = \dfrac{\alpha + z}{i}$ から $z = iw_1 - \alpha$

$|z| = 1$ より $|iw_1 - \alpha| = 1$

$\therefore |i|\left|w_1 - \dfrac{\alpha}{i}\right| = 1 \quad \therefore |w_1 - 1 - i| = 1$

よって w_1 は中心 $1+i$

半径1の円周上を動く．(右図)



(2) $w_2 = x + yi$ (x, y は実数) とおく。

$w_2\overline{\alpha} - \overline{w_2}\alpha + ki = 0$ から

$(x+yi)(-1-i) - (x-yi)(-1+i) + ki = 0$

$\therefore (-2x-2y+k)i = 0$

x, y, k は実数より $2x+2y-k=0 \cdots ①$

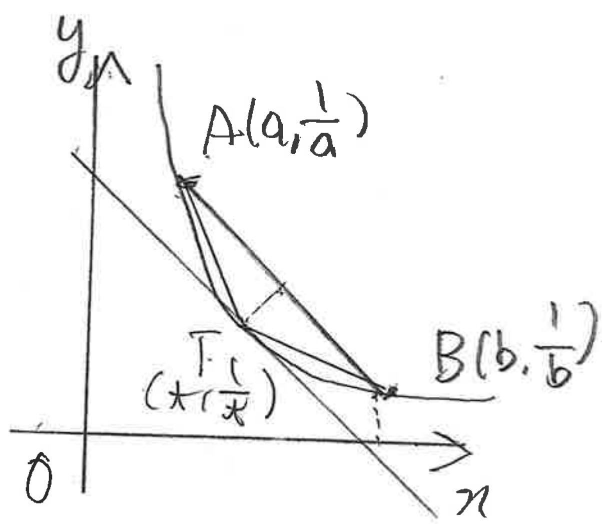
(1)より w_1 の軌跡は $(x-1)^2+(y-1)^2=1 \cdots ②$

xy 平面において ①と②が共有点をもつ条件を考える。

$\dfrac{|2+2-k|}{\sqrt{2^2+2^2}} \leqq 1$ から $4-2\sqrt{2} \leqq k \leqq 4+2\sqrt{2}$

よって k の最大値は $\underline{\underline{4+2\sqrt{2}}}$ …(答)

2022 鳥取：医[II]、工[III]



(1) $f(t)$ 最大は、$\triangle ATB$の底辺をAB

とするとき 高さ最大のとき。

すなわち $y=\frac{1}{x}$ の接線で

ABと平行なものと $y=\frac{1}{x}$

との接点がTとなるときである。

ABの傾きは $\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\frac{-1}{ab}$，$y=\frac{1}{x}$ より $y'=\frac{-1}{x^2}$

$\therefore \frac{-1}{t^2}=\frac{-1}{ab}$ $ab>0$，$t>0$ より $t=\sqrt{ab}$

ここで $0<a<b$ から $\sqrt{ab}-a=\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$b-\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$

$\therefore a<\sqrt{ab}<b$ となり $a<t<b$ をみたす。

$\therefore$ $t=\sqrt{ab}$ …(答)

(2) $a=1$，$b=2$ のとき $A(1,1)$，$B(2,\frac{1}{2})$，$T(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

直線AB $y=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}(x-1)+1$ より $x+2y-3=0$

Tと直線ABの距離は $\frac{|\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

よって $M=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ …(答)

2022 鳥取・医[III]、工[IV]

(1) $f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t$

$= 2\cos t(1 - 2\sin t)$

$f'(t) = 0$ は $\cos t = 0$ または $\sin t = \frac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

増減表より $f(t)$ の最大値は

$t = \frac{\pi}{6}$ のとき $\frac{1}{2}$ …(答)

(2) $y = 1 - \cos 2t = 1$ のとき $\cos 2t = 0$

$0 \leqq 2t \leqq \pi$ から $2t = \frac{\pi}{2}$ $\therefore t = \frac{\pi}{4}$

このとき $x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 1 = \sqrt{2} - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin 2t}{2\cos t(1 - 2\sin t)} = \frac{2\sin t}{1 - 2\sin t}$ より

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 - \sqrt{2}$

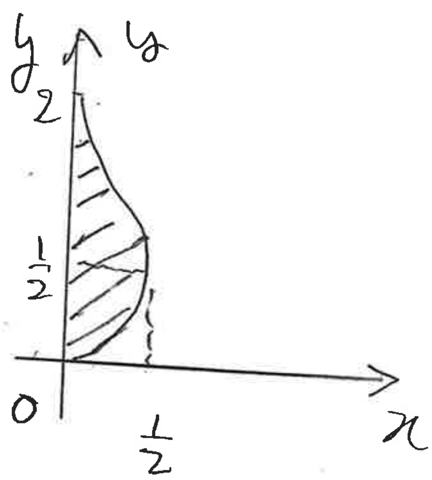
よって求める接線は $y = -(2+\sqrt{2})(x - \sqrt{2} + 1) + 1$

$\therefore y = -(2+\sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1$ …(答)

(3) $\frac{dy}{dt} = 2\sin 2t$

増減表より求める面積は図の斜線部

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nwarrow$	2



$S = \int_0^2 x\,dy$ $\quad dy = 2\sin 2t\,dt$

y	$0 \to 2$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t + \cos 2t - 1) \cdot 2\sin 2t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2 t \cos t + \sin 4t - 2\sin 2t)\,dt$

$= \left[\frac{8}{3}\sin^3 t - \frac{1}{4}\cos 4t + \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$ …(答)

2022 鳥取・医［Ⅳ］

(1) $a_n \geqq n$ …① とし、数学的帰納法で示す。

［1］$n=1$ のとき a_1は正の整数より $a_1 \geqq 1$

で ①は成り立つ。

［2］$n=k$ のとき ①が成り立つと仮定すると、

$a_k \geqq k$

$n=k+1$ のとき $a_{k+1} > a_k \geqq k$ となり

$a_{k+1} > k$ a_{k+1}は正の整数より $a_{k+1} \geqq k+1$

よって $n=k+1$ のときも ①は成り立つ

［1］［2］よりすべての正の整数nに対して $a_n \geqq n$ が成り立つ

（証明終）

(2) $n \geqq 3$ のとき $a_n^2 > a_n \cdot a_{n-1} \geqq n(n-1) > 0$

$$\therefore \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$n=3, 4, \cdots, N$ (Nは2以上の整数) を代入して辺々加えると

$$\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$$

$N \to \infty$ とすると

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_2}\right)^2 \leqq 1 + \frac{1}{4}$$ を加えて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 \leqq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} < 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$$ （証明終）