受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

〔人間科学部
生物資源科学部〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄	

1

(1) $3\times1-2\times1=1$ …① より整数解の1つは

$(x,y)=(1,1)$ …(答)

(2) $3x-2y=1$ …② とする

②−① を変形して $3(x-1)=2(y-1)$

3と2は互いに素より $(x-1,y-1)=(2m,3m)$

よって $(x,y)=(2m+1,3m+1)$ (mは整数) …(答)

(3) $z^2-z=(z-1)\cdot z$ は連続する2整数の積より 2の倍数。

よって z または $z-1$ が3の倍数となればよい。

zが奇数より $z=2k+1$ (kは整数) とおく。

(i) zが3の倍数のとき $z=3l$ (lは整数) とおくと

$3l=2k+1$ $\therefore 3l-2k=1$

(2)より $k=3n+1$ となるので $z=2(3n+1)+1=6n+3$

(ii) $z-1$が3の倍数のとき $z-1=3l$ から

$3l=2k$, 2と3は互いに素より $(l,k)=(2n,3n)$

よって $z=2\times3n+1=6n+1$

以上より $z=6n+1,\ 6n+3$ (nは整数) …(答)

数学　解答用紙

採点欄 2

nを自然数とする.

放物線 $y=x^2 \cdots ①$、直線 $y=\frac{1}{2^{n-1}}x \cdots ②$

直線 $y=\frac{1}{2^n}x \cdots ③$ とする.

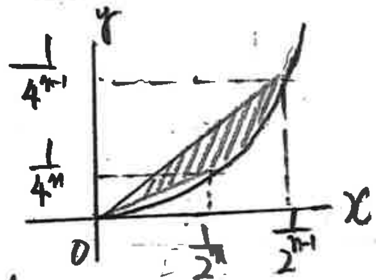
(1) ①と②の交点を求めると.

$x^2=\frac{1}{2^{n-1}}x$　$x\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0$　よって $x \neq 0$ より

$x \neq 0$ より $x=\frac{1}{2^{n-1}}$ このとき $y=\frac{1}{4^{n-1}}$　したがって $P_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{4^{n-1}}\right)$ …(答)

(2) ①と③との交点の座標は

$x^2=\frac{1}{2^n}x$ より $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{4^n}\right)$



したがって 求める面積 S_n は

$$S_n=\int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}x-x^2\right)dx-\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{1}{2^n}x-x^2\right)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}}x\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2^n}}x\left(x-\frac{1}{2^n}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-0\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^n}-0\right)^3=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8^{n-1}}-\frac{1}{8^n}\right)=\frac{7}{6\cdot 8^n}$$

(証明終)

(3) (2)より

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{6}{7}(8^1+8^2+8^3+\cdots+8^n)$$

$$=\frac{6}{7}\cdot\frac{8(8^n-1)}{8-1}=\frac{48}{49}(8^n-1)$$

よって $\frac{48}{49}(8^n-1) \geqq \frac{48}{49}\cdot 10^{15}$ より nを求める。

すなわち $8^n-1 \geqq 10^{15}$　$8^n \geqq 10^{15}+1$　$8^n > 10^{15}$

($\because 8^n$の1の位は 1にならないから)

$8^n > 10^{15}$ の両辺に常用対数をとると、

$\log_{10} 8^n > \log_{10} 10^{15}$

$\log_{10} 2^{3n} > 15$　$n > \frac{15}{3\log_{10}2}=\frac{5}{\log_{10}2}=16.6$

したがって、nは自然数だから $n=17$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

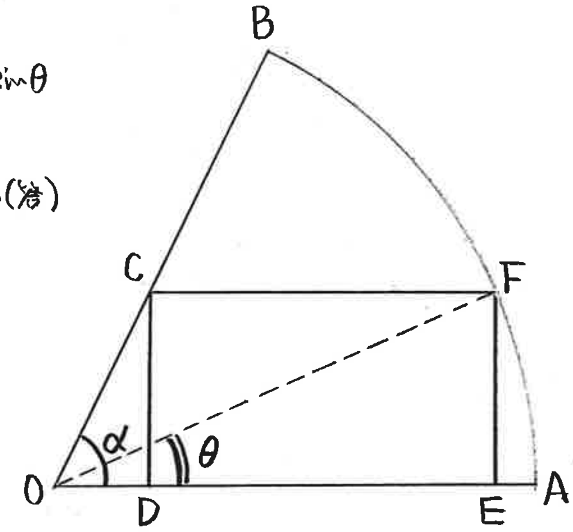
3

(1) $CD = EF = 1\cdot\sin\theta = \underline{\underline{\sin\theta}}$ …(答)

$\tan\alpha = \dfrac{CD}{OD}$ であるから、$OD = \dfrac{\sin\theta}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\theta$

そして、$OE = 1\cdot\cos\theta = \cos\theta$ なので

$DE = OE - OD = \underline{\underline{\cos\theta - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\theta}}$ …(答)



(2) 長方形CDEFの面積をSとすると

$$\begin{aligned}
S &= CD \times DE \\
&= \sin\theta\left(\cos\theta - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\theta\right) \\
&= \sin\theta\cos\theta - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin^2\theta \\
&= \frac{\sin2\theta\sin\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}(1-\cos2\theta) \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha}(\sin2\theta\sin\alpha + \cos2\theta\cos\alpha) - \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha}\cos(2\theta-\alpha) - \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}
\end{aligned}$$
(証明終)

(3) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\sin\alpha > 0$

よって Sが最大となるのは $\cos(2\theta-\alpha)$ が最大となるときであり、

$0 < \theta < \alpha$ より $-\alpha < 2\theta - \alpha < \alpha$ なので $2\theta - \alpha = 0$ つまり $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ のとき

$\cos(2\theta-\alpha) = 1$ (最大)となる

以上より Sが最大となるのは、$\underline{\underline{\theta = \dfrac{\alpha}{2}}}$ …(答) のときで

その最大値は $\underline{\underline{\dfrac{1-\cos\alpha}{2\sin\alpha}}}$ …(答)