2023 鳥取大・地域（[I]）

(1) $x>y$ より $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$ ∴ $y<8$ …①

$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ ∴ $y>4$ …②

①②より $4<y<8$ yは自然数より $\underline{\underline{5\leqq y\leqq 7}}$ …(答)

$y=5$ のとき $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ ∴ $x=20$

$y=6$ のとき $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ ∴ $x=12$

$y=7$ のとき $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$ xは自然数より不適

よって $\underline{\underline{(x,y)=(20,5),(12,6)}}$ …(答)

(2) $x>y>z$ より $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}$ ∴ $z<6$ …③

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$ より $z>2$ …④

③④より $2<z<6$ zは自然数より $\underline{\underline{3\leqq z\leqq 5}}$ …(答)

(i) $z=3$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)と同様にして $7\leqq y\leqq 11$

このうち xが自然数となるのは

$(x,y)=(42,7),(24,8),(18,9),(15,10)$

(ii) $z=4$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ (1)より

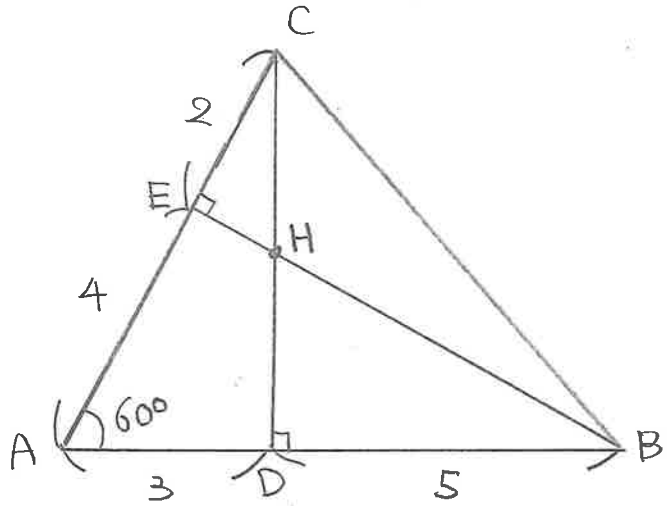
$(x,y)=(20,5),(12,6)$

(iii) $z=5$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$ (1)と同様に $5<y<\frac{20}{3}$ から $y=6$

このとき xは自然数にならないので不適

以上より $\underline{\underline{(x,y,z)=(42,7,3),(24,8,3),(18,9,3),(15,10,3),(20,5,4),(12,6,4)}}$ …(答)

2023 鳥取大・工（[I]），地域（[II]）



図のように，点D，Eをとる．

$\begin{cases} AD = AC\cos 60^\circ = 3 \\ AE = AB\cos 60^\circ = 4 \end{cases}$ より

$DB = 5$，$EC = 2$ となる

3点 C，H，D は同一直線上にあるので，

$\overrightarrow{CH} = t\overrightarrow{CD}$ （t：実数） $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + t(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{8}t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ … ①

また，3点 B，H，E は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{BH} = s\overrightarrow{BE}$ （s：実数） $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + s(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AH} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{AC}$ … ②

①，②より $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ なので

$\begin{cases} 1 - s = \frac{3}{8}t & \Leftrightarrow \quad 3t + 8s = 8 \quad \cdots ③ \\ \frac{2}{3}s = 1 - t & \Leftrightarrow \quad 3t + 2s = 3 \quad \cdots ④ \end{cases}$

③，④より $s = \frac{5}{6}$，$t = \frac{4}{9}$

したがって， $\underline{\underline{\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}}}$ …（答）

2023 鳥取大・医([I]), 工([II]), 地域([III])

(1) $P_n = \dfrac{{}_6C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+6}C_2} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$\dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)} \times \dfrac{(n+7)(n+6)}{12(n+1)} = \dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)}$

$\dfrac{P_n}{P_{n+1}} \leqq 1$ とすると $\dfrac{n(n+7)}{(n+1)(n+5)} \leqq 1$ より $n \leqq 5$

すなわち $1 \leqq n \leqq 4$ のとき $P_n < P_{n+1}$

$n=5$ のとき $P_5 = P_6$

$n \geqq 6$ のとき $P_n > P_{n+1}$

よって $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 = P_6 > P_7 > \cdots$

となり, P_n は $n=5, 6$ のとき最大値 $\dfrac{6}{11}$ …(答)

(2) (i) Aから赤球1個, 白球1個で, Bから赤球1個, 白球1個取り出す確率は

$P_n \times \dfrac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)}$

(ii) Aから赤球2個で, Bから赤球1個, 白球1個取り出す確率は

$\dfrac{{}_6C_2}{{}_{n+6}C_2} \times \dfrac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \dfrac{16}{(n+6)(n+5)}$

$\therefore q_n = \dfrac{4n}{(n+6)(n+5)} + \dfrac{16}{(n+6)(n+5)} = \dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)}$

$q_n < \dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)} < \dfrac{1}{3}$

整理して $n(n-1) > 18$ $n(n-1)$ は $n \geqq 1$ で単調増加だから

$4 \times 3 = 12 < 18$, $5 \times 4 = 20 > 18$

よって 最小の自然数 n は $n=5$ …(答)

2023 鳥取大・地域([IV])

(1) $\cos\theta = x$ とすると，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<x<1$

$\cos 4\theta = \cos 2\times 2\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0$ より

$x + (2x^2-1) + (4x^3-3x) + (8x^4-8x^2+1) = 0$

$8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x = 0$

$\div 2x$ $\quad 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$

$(x+1)(4x^2-2x-1) = 0$

$x = -1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ $\quad 0<x<1$ より $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

したがって，$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ・・・(答)

(2) (左辺)$-$(右辺) $= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} - \{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)\}$

$= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} - (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} + \alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1}) + \alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1}$

$= 0$

したがって，$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ が成り立つ (証明終)

(3) (1) より $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ここで，$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，($\alpha+\beta = 1$，$\alpha\beta = -1$)

$a_n = \alpha^n + \beta^n$

(2) より $a_{n+2} = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}$

$= (\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$

$= (\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})\times 1 - (-1)(\alpha^n+\beta^n)$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ・・・(答)

(4) $a_1 = \alpha+\beta = 1$，$a_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$，$a_3 = a_2 + a_1 = 4$ である

$(-1)^n\{a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2\}$ が n によらない定数5であることを数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき，

$(-1)^1\{a_1 a_3 - (a_2)^2\} = (-1)\{1\times 4 - 3^2\} = 5$ より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき

$(-1)^k\{a_k a_{k+2} - (a_{k+1})^2\} = 5$ であると仮定すると

$n=k+1$ のとき

$(-1)^{k+1}\{a_{k+1}a_{k+3} - (a_{k+2})^2\}$

$= (-1)^{k+1}\{a_{k+1}(a_{k+2}+a_{k+1}) - (a_{k+1}+a_k)a_{k+2}\}$ ($\because a_{k+3} = a_{k+2}+a_{k+1}$，$a_{k+2} = a_{k+1}+a_k$)

2023 鳥取大・地域（[IV]）のつづき

$= (-1)^{k+1}\{(a_{k+1})^2 - a_k a_{k+2}\}$

$= (-1)^k\{a_k a_{k+2} - (a_{k+1})^2\} = 5$　となり $n = k+1$ のときも成立する

以上 (i), (ii) より，すべての自然数 n において，$(-1)^n\{a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2\}$ は n によらない定数5であることが示せた。　（証明終）