受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科〕

コード		得点	1		2		3		4	
2	0									
7	8		11	12	14	15	17	18	20	21

採点欄

1

(1) $(3^x)^2 - 3^x = 1$

$X = 3^x$ とおくと，$X > 0$

$X^2 - X - 1 = 0$ より $X = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$X > 0$ から，$X = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$3^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\underline{\underline{x = \log_3 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ …(答)

(2) $25^x - 15^x = 9^x$ の両辺を $9^x\,(>0)$ で割ると

$\left(\dfrac{25}{9}\right)^x - \left(\dfrac{15}{9}\right)^x = 1$

$\left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^x\right\}^2 - \left(\dfrac{5}{3}\right)^x - 1 = 0$

$Y = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$ とおくと，$Y > 0$

$Y^2 - Y - 1 = 0$ より $Y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$Y > 0$ から $Y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\underline{\underline{x = \log_{\frac{5}{3}} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ …(答)

受験番号					
1	2	3	4	5	6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

2

$|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}|=1$ …①

$|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=1$ …②　とおく。

(1) ①より $|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4|\overrightarrow{OQ}|^2=1$ …③

②より $|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|^2=4|\overrightarrow{OP}|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OQ}|^2=1$ …④

③−④より．$-3|\overrightarrow{OP}|^2+3|\overrightarrow{OQ}|^2=0$　$\therefore |\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2$

$|\overrightarrow{OP}|\geqq 0$，$|\overrightarrow{OQ}|\geqq 0$ より　$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$ …⑤

また，③，⑤より，$|\overrightarrow{OP}|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4|\overrightarrow{OP}|^2=1$　$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}|\overrightarrow{OP}|^2-\frac{1}{4}$ …⑥

となり．内積 $(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ})\cdot(2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})=2|\overrightarrow{OP}|^2-5\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+2|\overrightarrow{OQ}|^2$

$=2|\overrightarrow{OP}|^2-5\left(\frac{5}{4}|\overrightarrow{OP}|^2-\frac{1}{4}\right)+2|\overrightarrow{OP}|^2$ (∵⑤,⑥より)

$=-\frac{9}{4}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{5}{4}$ …⑦

このとき，

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}$ と $2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0 のとき．

$(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ})\cdot(2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})=|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}||2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|\cos 0$

$\therefore -\frac{9}{4}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{5}{4}=1\times1\times1$　(∵①,②,⑦より)

$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}$

$|\overrightarrow{OP}|\geqq 0$ より　$|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{3}$ …(答)

同様にして，$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}$ と $2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$ のなす角が π のとき．

$(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ})\cdot(2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})=|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}||2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|\cos\pi=1\times1\times(-1)$

$\therefore -\frac{9}{4}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{5}{4}=-1$　よって．$|\overrightarrow{OP}|^2=1$　$|\overrightarrow{OP}|=1$ …(答)

(2) $|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP}|^2+4\left(\frac{5}{4}|\overrightarrow{OP}|^2-\frac{1}{4}\right)+4|\overrightarrow{OP}|^2$

$=10|\overrightarrow{OP}|^2-1$ …⑧　(∵⑤,⑥より)

ここで，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと

内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{OP}|^2\cos\theta$　(∵⑤より)

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より．$-|\overrightarrow{OP}|^2\leqq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq|\overrightarrow{OP}|^2$

⑦より　$-|\overrightarrow{OP}|^2\leqq-\frac{9}{4}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{5}{4}\leqq|\overrightarrow{OP}|^2$

よって．$\frac{1}{9}\leqq|\overrightarrow{OP}|^2\leqq1$．

であるから，$10|\overrightarrow{OP}|^2-1$ のとりうる値の範囲は．$\frac{1}{9}\leqq10|\overrightarrow{OP}|^2-1\leqq9$．

ゆえに　⑧より　$\frac{1}{9}\leqq|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}|^2\leqq9$

$|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}|\geqq0$ より　$\frac{1}{3}\leqq|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}|\leqq3$

したがって．$|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}|$ の最大値 $M=3$，最小値 $m=\frac{1}{3}$ …(答)

数学　解答用紙

採点欄

3

(1) $f(x)=(-x^2+2)\sin x-2x\cos x$ について

$f'(x)=\{-2x\sin x+(-x^2+2)\cos x\}-2(\cos x-x\sin x)$

$=-x^2\cos x$ なので $0<x<\pi$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$2-\frac{\pi^2}{4}$	$\nearrow$	(2π)

$f(\frac{\pi}{2})=2-\frac{\pi^2}{4}<0$, $f(\pi)=2\pi>0$. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ で $f(x)$ は単調増加

したがって $f(x)=0$ をみたす x はただ1つである　（証明終）

(2) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ について $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\sin x+\dfrac{1}{x}\cos x=\dfrac{-\sin x+x\cos x}{x^2}$ で

$H(x)=-\sin x+x\cos x$ とおくと $H'(x)=-\cos x+(\cos x-x\sin x)=-x\sin x$ だから

x	0	$\cdots$	π
$H'(x)$	(0)	$-$	(0)
$H(x)$	(0)	$\searrow$	$(-\pi)$

よって $0<x<\pi$ のとき $g'(x)<0$

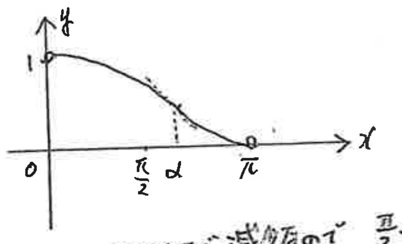
また $g''(x)=\dfrac{-2}{x^3}(-\sin x+x\cos x)+\dfrac{1}{x^2}\{-\cos x+(\cos x-x\sin x)\}=\dfrac{(-x^2+2)\sin x-2x\cos x}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x^3}$

したがって $g(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$g'(x)$	/	$-$	$-$	$-$	
$g''(x)$	/	$-$	0	$+$	
$g(x)$	/	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	(0)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

グラフの概形は下のようになる



…（答）

(3) (2)より $g(x)$ は $0<x<\pi$ で減少なので $\frac{\pi}{2}-t<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $g(x)>g(x+t)$

したがって $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx>\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}g(x+t)dx$

ここで $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}g(x+t)dx$ について、$x+t=u$ とおくと $\dfrac{dx}{du}=1$

x	$\frac{\pi}{2}-t\to\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}+t$

なので

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}g(x+t)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t}g(u)du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t}g(x)dx$

したがって $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx>\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t}g(x)dx$　（証明終）

受験番号

1	2	3	4	5	6

4

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

採点欄

4

(1) 2項定理より

$(x+1)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4 + {}_5C_2x^3 + {}_5C_3x^2 + {}_5C_4x + {}_5C_5 = \underline{\underline{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}}$ …(答)

(2) ${}_pC_k = \dfrac{p(p-1)\cdots\cdots(p-k+1)}{k!} = \dfrac{p}{k}\cdot\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{p}{k}\,{}_{p-1}C_{k-1}$ である。

よって $k\,{}_pC_k = p\,{}_{p-1}C_{k-1}$ である。

${}_pC_k$, ${}_{p-1}C_{k-1}$ はいずれも整数であり，

p と k $(0<k<p)$ は互いに素である。

よって，${}_pC_k$ は p の倍数である。（証明終）

(3) n による数学的帰納法で証明する。

証明すべき命題「n^p-n は p の倍数である」を[A]とする。

[I] $n=1$ のとき

$n^p-n=0$ より [A]は成り立つ

[II] $n=k$ のとき成り立つとすると

k^p-k は p の倍数である。

ここで $(k+1)^p-(k+1) = {}_pC_0k^p + {}_pC_1k^{p-1} + \cdots + {}_pC_{p-1}k + {}_pC_p - k - 1$

$= k^p - k + {}_pC_1k^{p-1} + \cdots + {}_pC_{p-1}k$

ここで(2)より ${}_pC_1$, ${}_pC_2$, ……, ${}_pC_{p-1}$ はすべて p の倍数

である。よって ${}_pC_1k^{p-1} + \cdots + {}_pC_{p-1}$ は p の倍数である。

また帰納法の仮定より k^p-k は p の倍数である。

よって $(k+1)^p-(k+1)$ は p の倍数である。

つまり $n=k+1$ のときも[A]は成り立つ

[I], [II] よりすべての自然数 n に対して[A]は成り立つ。

（証明終）